

## Лекция 9

## 2.7 Конечномерные $C^*$ -алгебры

Рассмотрим  $*$ -слабую топологию на  $A$ , задаваемую системой полунорм  $a \mapsto |\varphi(a)|$  для всех линейных функционалов  $\varphi$ . Из леммы 2.20 и теоремы 2.22 следует, что ту же топологию можно получить, ограничиваясь только полунормами, связанными с состояниями.

Заметим также, что соответствующее ЛТП обладает свойством гомотетии 2.27.

**Лемма 2.32.** *Конечномерная  $C^*$ -алгебра всегда имеет единицу.*

*Доказательство.* Если  $A$  конечномерна, то топология нормы совпадает с  $*$ -слабой топологией по теореме 2.31. Пусть  $u_n$  — аппроксимативная единица алгебры  $A$ . Тогда для любого состояния  $\varphi$  последовательность  $\varphi(u_n)$  является неубывающей и ограниченной. Поэтому  $u_n$  сходится в  $*$ -слабой топологии, а значит, и по норме. Таким образом, имеется предел  $\lim_n u_n = a$ . Тогда  $ax = xa = x$  для любого  $x \in A$ , так что  $a = 1$ .  $\square$

**Лемма 2.33.** *Пусть  $I \subset A$  — идеал в конечномерной  $C^*$ -алгебре  $A$ . Тогда  $I = Ar$  для некоторого центрального проектора (=идемпотента из центра)  $r$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $I$  конечномерен, то унитарен по лемме 2.32. Пусть  $p \in I$  — единица  $I$ . Тогда для всякого  $x \in A$  выполняется  $xp \in I$ , так что  $p(xp) = xp$ . Поэтому  $px^*p = x^*p$  для любого  $x \in A$ , откуда  $xp = pxp = px$  и  $p$  принадлежит центру  $A$ . Очевидно, что  $p^2 = p$ .  $\square$

**Лемма 2.34.** *Простая конечномерная  $C^*$ -алгебра  $A$  изометрически  $*$ -изоморфна матричной алгебре  $M_n$  для некоторого  $n$ .*

*Доказательство.* Прежде всего, заметим, что  $aAb \neq 0$  для любых ненулевых  $a, b \in A$ . Действительно,  $AaA$  является ненулевым идеалом (так как  $A$  с единицей и  $0 \neq a = 1 \cdot a \cdot 1 \in A$ ), так что в силу простоты,  $AaA = A$ . Поэтому  $1 = \sum_i x_i a y_i$  и  $b = \sum_i x_i a y_i b$ . Поэтому, если  $a y b = 0$  для любого  $y \in A$ , то  $b = \sum_i x_i (a y_i b) = 0$ , что противоречит предположению.

Пусть  $B$  — некоторая максимальная коммутативная подалгебра  $A$ . Тогда она может быть отождествлена с  $C(X) = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \cdot e_n$  для некоторого  $n$ , где  $X$  состоит из  $n$  точек, а  $e_i \in B$  обозначает элемент, соответствующий характеристической функции в точке  $i$ . При этом  $e_i$  являются проекторами с соотношениями  $e_i e_j = 0$  для  $i \neq j$  и  $\sum_{i=1}^n e_i = 1$ . Поскольку  $e_i A e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i A e_i = 0$  а  $B$  максимальная, то  $e_i A e_i \subset B$ . Поэтому  $e_i A e_i = \mathbb{C} \cdot e_i$  (поскольку, очевидно,  $0 \neq e_i A e_i \ni e_i$ , или можно воспользоваться утверждением из начала доказательства).

Для любых  $i, j$  найдется такой  $x = x_{ij} \in A$ , что  $x = e_i x e_j \neq 0$ ,  $\|x\| = 1$ . Действительно, в силу утверждения из начала доказательства,  $e_i A e_j \neq 0$ , так что имеется  $x = e_i y e_j$  с  $\|x\| = 1$ . При этом  $e_i x e_j = e_i e_i y e_j e_j = e_i y e_j = x$ . Тогда  $x^* x = e_j x^* e_i e_i x e_j \in e_j A e_j$ , а значит, по доказанному, имеет вид  $\alpha e_j$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Так как  $x^* x$

— положительный элемент, по норме равный единице, то  $\alpha = 1$ , так что  $x^*x = e_j$ . Аналогично,  $xx^* = e_i$ . Обозначим такой  $x = x_{ij}$  для  $j = 1$  через  $u_i$ , так что  $u_i = e_i x e_1 = e_i u_i e_1$ . Тогда  $u_i^* u_i = e_1$ ,  $u_i u_i^* = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Положим  $u_{ij} := u_i u_j^*$ . При этом  $u_i e_1 u_i^* = u_i u_i^* u_i u_i^* = e_i e_i = e_i$ , так что  $u_{ij} u_{ji} = u_i u_j^* u_j u_i^* = u_i e_1 u_i^* = e_i$ . Также  $e_j u_{ji} = u_j u_j^* u_j u_i^* = u_j e_1 u_i^* = u_j u_i^* u_i u_i^* = u_{ji} e_i$ , и  $e_i u_{ij} = u_i u_i^* u_i u_j^* = u_i e_1 u_j^* = u_i u_j^* u_j u_i^*$ .

Если  $x \in e_i A e_j$ , то есть  $x = e_i a e_j$ , то  $x u_{ji} = e_i a e_j u_{ji} = e_i a u_{ji} e_i \in e_i A e_i$ , так что  $x u_{ji} = \lambda e_i$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда  $x = x e_j = x u_{ji} u_{ij} = \lambda e_i u_{ij} = \lambda u_{ij}$ , так что для любого  $x \in A$  существует такое число  $\lambda_{ij}(x) \in \mathbb{C}$ , что  $e_i x e_j = \lambda_{ij}(x) u_{ij}$ . Таким образом,  $x = \sum_{i,j} e_i x e_j = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(x) u_{ij}$ . Соответствие  $x \mapsto (\lambda_{ij}(x))$  определяет изоморфизм  $\kappa : A \rightarrow M_n$  (задача 47).  $\square$

**Задача 47.** Проверить биективность и необходимые алгебраические свойства  $\kappa$ .

**Теорема 2.35.** Если  $A$  конечномерна, то  $A = \bigoplus_k A p_k$ , где  $p_k$  — центральные проекторы, а каждая  $A p_k$  — матричная алгебра  $M_{n(k)}$ .

*Доказательство.* Для простой алгебры результат следует из леммы 2.34. Если  $A$  не является простой, то  $I = A p$  по лемме 2.33, где  $p$  — центральный проектор. Тогда  $A = I \oplus J$ , где  $J := A(1 - p)$ . Тогда  $J$  — тоже идеал, поскольку  $(1 - p)$  — тоже центральный проектор, так что  $A(1 - p)A = AA(1 - p) \subseteq A(1 - p)$ . При этом центр  $A$ , будучи конечномерной коммутативной алгеброй, изоморфен  $\mathbb{C}^m$  (функциям на конечном множестве), а проекторам соответствуют характеристические функции. Далее рассуждаем по индукции, уменьшая размерность, пока не придем к сумме простых алгебр.  $\square$

## 2.8 Невырожденные представления

**Определение 2.36.** Пусть  $\pi$  — представление  $C^*$ -алгебры  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$ . Обозначим через  $\pi(A)H$  (возможно незамкнутое) линейное пространство конечных линейных комбинаций вида  $\sum_i \pi(a_i)\xi_i$ , где  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$ . Представление  $\pi$  называется *невырожденным*, если  $\pi(A)H$  плотно в  $H$ .

**Задача 48.** Если у  $A$  есть единица, то  $\pi$  является невырожденным тогда и только тогда, когда  $\pi(1) = 1$ .

**Лемма 2.37.** Пусть  $I \subset A$  — идеал, а  $\pi$  — невырожденное представление  $I$  в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда существует и единственно продолжение  $\pi$  до представления  $\tilde{\pi}$  всей алгебры  $A$  в  $H$ .

*Доказательство.* Определим  $\tilde{\pi}$  сначала на векторах из плотного подпространства  $\pi(I)H \subset H$  формулой

$$\tilde{\pi}(a) \left( \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right) := \sum_i \pi(a j_i)\xi_i. \quad (2.4)$$

Определение корректно, поскольку, если  $\sum_i \pi(j_i)\xi_i = \sum_i \pi(j'_i)\xi'_i$ , то

$$\tilde{\pi}(a) \left( \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\pi}(a) \left( \sum_i \pi(u_\lambda j_i)\xi_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(au_\lambda) \left( \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right)$$

и, аналогично,  $\tilde{\pi}(a)(\sum_i \pi(j'_i)\xi'_i) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(au_\lambda)(\sum_i \pi(j'_i)\xi'_i)$ , где  $u_\lambda \in I$  — аппроксимативная единица  $I$ . Заметим, что существование последних пределов в цепочке следует из существования предпоследних — то есть, тем самым, для каждого из двух случаев обосновывается отдельно. Поскольку

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\pi}(a) \left( \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right) \right\| &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \left\| \pi(au_\lambda) \left( \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right) \right\| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi(au_\lambda)\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right\| \leq \\ &\leq \|a\| \cdot \sup_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right\| = \|a\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i)\xi_i \right\|, \end{aligned}$$

то  $\tilde{\pi}$  ограничено, а значит,  $\tilde{\pi}(a)$  продолжается до ограниченного оператора в  $H$ .

При этом, как легко проверить,  $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$  и  $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$  для любых  $a, b \in A$ , так что  $\tilde{\pi}$  является представлением  $A$ . Единственность следует из того, что любое продолжение  $\pi$  должно удовлетворять (2.4).  $\square$

**Лемма 2.38.** *В условиях леммы 2.37 представление  $\pi$  неприводимо тогда и только тогда, когда  $\tilde{\pi}$  неприводимо.*

*Доказательство.* Пусть  $\pi$  приводится собственным инвариантным подпространством  $L \subset H$ . Тогда, в силу невырожденности,  $H = \overline{\pi(I)(L + L^\perp)} \subseteq \overline{\pi(I)L} + \overline{\pi(I)L^\perp}$ . Поскольку  $L^\perp$  тоже инвариантно, то  $\pi(I)L^\perp \subset L^\perp$ , так что  $\overline{\pi(I)L} = L$ . Тогда  $\overline{\tilde{\pi}(A)L} = \overline{\tilde{\pi}(A)\pi(I)L} = \overline{\pi(I)L} = L$  и  $L$  приводит  $\tilde{\pi}$ . В обратную сторону утверждение тривиально.  $\square$

**Лемма 2.39.** *Пусть  $\pi$  — представление  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$ , а  $I \subset A$  — идеал. Тогда ортогональный проектор  $p$  на  $\overline{\pi(I)H}$  лежит в центре  $\pi(A)''$ . Если  $\pi$  неприводимо и  $\pi(I) \neq 0$ , то  $\pi|_I$  также неприводимо.*

*Доказательство.* Поскольку  $\pi(A)\pi(I)H = \pi(I)H$ , то  $\overline{\pi(I)H}$  инвариантное пространство для  $\pi(A)$ , а значит,  $p \in \pi(A)'$  (см. конец доказательства леммы 2.3). Если  $x \in \pi(I)'$ , то  $x\pi(j)\xi = \pi(j)x\xi \in \pi(I)H$  для любых  $j \in I$ ,  $\xi \in H$ , так что  $pH$  — инвариантное подпространство  $\pi(I)'$  и, значит,  $p \in \pi(I)''$ . Поэтому

$$p \in \pi(I)'' \cap \pi(A)' \subset \pi(A)'' \cap \pi(A)',$$

что является центром  $\pi(A)''$ .

Если  $\pi$  неприводимо, то  $p$  — скалярный оператор (то есть 0 или 1) (см. лемму 2.3), а поскольку  $\pi(I) \neq 0$ , то  $p = 1$ . Значит,  $\pi|_I$  является невырожденным. Значит, по лемме 2.38 оно неприводимо.  $\square$

## Глава 3

# Специальные классы $C^*$ -алгебр

### 3.1 $C^*$ -алгебра компактных операторов

Мы рассмотрим в этом параграфе  $C^*$ -подалгебры  $C^*$ -алгебры  $\mathbb{K}(H)$  компактных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ . Мы будем говорить, что  $C^*$ -подалгебра алгебры  $\mathbb{B}(H)$  *неприводима*, если ее тождественное представление неприводимо.

**Определение 3.1.** Проектор  $p$  называется *минимальным*, если не существует такого проектора  $q \neq 0$ ,  $q \neq p$ , что  $qp = q$ . Другими словами,  $p$  не *доминирует* никакого нетривиального проектора.

**Лемма 3.2.** *Любая ненулевая  $C^*$ -алгебра  $A$ , состоящая из компактных операторов, содержит минимальный проектор  $e$  и  $eAe = \mathbb{C} \cdot e$ . Если  $A$  неприводима, то  $e$  — проектор ранга 1 (как проектор в гильбертовом пространстве).*

*Доказательство.* Поскольку  $A$  ненулевая, то она содержит ненулевой положительный оператор (см. (1.7)), который (как известно из основного курса функционального анализа (см. [9, теорема 1, стр. 360]), имеет дискретный спектр (кроме 0) с собственными значениями конечных кратностей. Рассмотрим проектор на ненулевую точку спектра. Поскольку характеристическая функция этой изолированной точки является непрерывной на спектре, то этот проектор принадлежит  $A$ . Тогда среди доминируемых им ненулевых проекторов имеется некоторый проектор  $e \in A$  минимального ранга среди доминируемых (поскольку у них конечные ранги). Тогда  $e$  — минимальный (единственность минимального и даже равенство рангов у разных минимальных не утверждается). Если  $eAe$  состоит не только из  $\mathbb{C} \cdot e$ , то тем же способом мы сможем построить проектор, доминируемый  $e$  и прийти к противоречию.

Предположим теперь, что  $A$  неприводима, но ранг  $e$  больше 1. Выберем пару ненулевых ортогональных векторов  $\xi, \eta$  в образе  $e$ . Поскольку для любого  $a$  существует такое число  $\lambda \in \mathbb{C}$ , что  $ea\xi = \lambda\xi$ , то  $(\xi, a\eta) = (e\xi, a\eta) = (\xi, ea\eta) = \lambda(\xi, \eta)$ , то есть  $a\eta \perp \xi$  для любого  $a \in A$ . Рассматривая все  $\xi$  из образа  $e$ , перпендикулярные  $\eta$ , видим, что подпространство  $\overline{A\eta}$  является собственным инвариантным подпространством. Противоречие.  $\square$

**Лемма 3.3.** *Единственной неприводимой  $C^*$ -подалгеброй  $\mathbb{K}(H)$  является она сама.*

*Доказательство.* Пусть  $A$  — неприводимая  $C^*$ -подалгебра  $\mathbb{K}(H)$ , а  $e \in A$  — минимальный проектор ранга 1. Тогда найдется такой вектор  $\xi \in H$  единичной длины, что  $e\eta = \xi(\xi, \eta)$  для любого  $\eta$  (берем  $\xi$  из образа  $e$ ). В силу неприводимости, для любых  $\eta, \zeta \in H$  найдутся такие элементы  $a, b \in A$ , что  $a\xi = \eta$ ,  $b\xi = \zeta$  (см. лемму 2.5). При этом  $A \ni aeb^*$  и  $aeb^*(\kappa) = a\xi(\xi, b^*\kappa) = \eta(\zeta, \kappa)$ ,  $\kappa \in H$ . Таким образом,  $A$  содержит все операторы ранга 1. Такие операторы порождают  $\mathbb{K}(H)$  (любой компактный приближается конечномерными), так что  $A = \mathbb{K}(H)$ .  $\square$

**Следствие 3.4.** *Алгебра  $\mathbb{K}(H)$  является простой.*

*Доказательство.* Поскольку  $\mathbb{K}(H)$  неприводима, то любой ее ненулевой идеал тоже неприводим (по лемме 2.39), так что он совпадает с  $\mathbb{K}(H)$  (по лемме 3.3).  $\square$

**Следствие 3.5.** *Пусть  $A$  — неприводимая  $C^*$ -подалгебра  $\mathbb{B}(H)$ , содержащая ненулевой компактный оператор. Тогда  $\mathbb{K}(H) \subseteq A$ .*

*Доказательство.* Поскольку  $A \cap \mathbb{K}(H)$  — ненулевой идеал  $A$ , то он неприводим по лемме 2.39. По лемме 3.3 эта подалгебра  $\mathbb{K}(H)$  должна совпадать со всей  $\mathbb{K}(H)$ .  $\square$