

Лекция 9

Лемма 2.16. Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеется такое состояние φ на A , что $|\varphi(a)| = \|a\|$.

Доказательство. Если A без единицы, то будем работать в A^+ . Рассмотрим коммутативную C^* -алгебру $C^*(a)$. Тогда найдется такой мультипликативный линейный функционал φ_0 на $C^*(a)$, что $|\varphi_0(a)| = \|a\|$ (надо взять в качестве φ_0 отображение взятия значения в той точке $\text{Sp}(a)$, где функция $\hat{a}$ достигает своего максимума). Тогда $\varphi_0(1) = 1 = \|\varphi_0\|$. Рассмотрим продолжение φ_0 по теореме Хана-Банаха до функционала φ на A^+ . Тогда, поскольку $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$, то φ — состояние по лемме 2.15. $\square$

Следствие 2.17. Для любого $a \in A$ существуют такие представление π и единичный вектор ξ в пространстве представления, что $\|\pi(a)\xi\| = \|a\|$.

Доказательство. По предыдущей лемме, найдем такое состояние φ , что $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. Пусть $\pi = \pi_\varphi$ и $\xi = \xi_\varphi$ получены для φ по ГНС-конструкции. Тогда

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = (\xi, \pi(a^*a)\xi) = \varphi(a^*a) = \|a\|^2.$$

 $\square$

Теорема 2.18 (Гельфанда-Наймарка). Любая C^* -алгебра изометрически $*$ -изоморфна C^* -подалгебре $\mathbb{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H . Если A сепарабельна, то и H может быть выбрано сепарабельным.

Доказательство. Положим $\pi = \bigoplus_\varphi \pi_\varphi$, где прямая сумма берется по всем состояниям A . Точнее, рассматривается гильбертова прямая сумма $H := \bigoplus_\varphi H_\varphi$ (пополнение по ℓ_2 норме пространства финитных отображений $\varphi \mapsto h_\varphi \in H_\varphi$, то есть наборов $h = \{h_\varphi\}$, $h_\varphi \in H_\varphi$, причем лишь конечное число h_φ отлично от нуля, а норма определяется как $\|h\|^2 = \sum_\varphi \|h_\varphi\|^2$) с диагональным действием $\pi(a)(\{h_\varphi\}) = \{\pi_\varphi(a)(h_\varphi)\}$. Тогда, как видно из доказательства предыдущего следствия, $\|\pi(a)\| = \sup_\varphi \|\pi_\varphi(a)\| = \|a\|$. Если же A сепарабельна, то достаточно брать сумму по счетному набору φ_n , где $\|\pi_{\varphi_n}(a_n)\| = \|a_n\|$, для элементов a_n , образующих плотное подмножество в A . Тогда $\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$, а соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, поскольку каждое H_{φ_n} сепарабельно (как пополнение фактора сепарабельного пространства). $\square$

Определение 2.19. Построенное в теореме (в первой ее части) представление называется универсальным представлением A . Алгебра фон Неймана $\pi(A)''$, где π — универсальное представление, содержит $\pi(A) \cong A$ в качестве слабо плотного подмножества и называется обертывающей алгеброй фон Неймана для A .

Отметим, что универсальное представление является прямой суммой циклических. Получаем следующее утверждение.

Следствие 2.20. Пусть π — точное представление C^* -алгебры A . Тогда существуют такие циклические представления π_λ , $\lambda \in \Lambda$, что $\|\pi(a)\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi_\lambda(a)\|$ для любого $a \in A$.

2.5 Разложение Жордана

Лемма 2.21. Пусть φ — линейный функционал на A . Тогда $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 — самосопряженные.

Доказательство. Положим, как делали и для элементов алгебры,

$$\psi_1(a) = (\varphi(a) + \overline{\varphi(a^*)})/2 \quad \text{и} \quad \psi_2(a) = (\varphi(a) - \overline{\varphi(a^*)})/2i.$$

□

Обозначим через A_{sa} множество всех самосопряженных элементов A . Тогда, очевидно, что A_{sa} является вещественным банаховым пространством.

Задача 47. Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на A и (вещественными) линейными функционалами на A_{sa} .

Для доказательства теоремы о разложении Жордана нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 2.22 (о продолжении положительных функционалов). Пусть $B \subset A$ — C^* -подалгебра, а $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ — положительный функционал. Тогда найдется такой положительный функционал $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$, что $\varphi'|_B = \varphi$ и $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.

Доказательство. Возможны следующие случаи:

- (а) обе алгебры имеют общую единицу,
- (b) A имеет единицу, а B — нет,
- (с) обе алгебры не имеют единицы,
- (d) B имеет единицу, а A — нет.
- (е) обе алгебры с 1, но $1_A \neq 1_B$.

В силу следствия 2.14, (с) и (b) сводятся присоединением единицы к (а) (для (b) нужно заметить, что $B^+ \cong B \oplus \mathbb{C}1_A$). В свою очередь, (d), очевидно, сводится к (е).

В случае (а) продолжим по теореме Хана-Банаха φ до некоторого $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$ той же нормы. Тогда по лемме 2.10, $\|\varphi'\| = \|\varphi\| = \varphi(1) = \varphi'(1)$ и φ' — положительный по лемме 2.15.

В случае (е) рассмотрим C^* -подалгебру $B_1 := B \oplus \mathbb{C}1_A = B \oplus \mathbb{C}(1_A - 1_B)$ и продолжим φ до $\varphi_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$, положив $\varphi_1(1_A - 1_B) = 0$. Тогда $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a)$, где $a \in B_1$. Действительно, если $a \in B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a) = \varphi(a)$, а если $a = 1_A - 1_B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B(1_A - 1_B)) = \varphi(0) = 0$. При этом единица B_1 — это 1_A . Кроме того, $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\| \cdot \|1_B\| = \|\varphi\|$, а $\varphi_1(1_A) = \varphi(1_B) = \|\varphi\|$. Значит, $\|\varphi_1\| = \|\varphi\| = \varphi_1(1_A) = \varphi_1(1_{B_1})$ и, по лемме 2.15, φ_1 — положительный. Таким образом, случай (е) тоже свелся к доказанному случаю (а). □

Теорема Жордана о разложении меры в сумму положительной и отрицательной [6, гл. VI, §5, теорема 1] на языке функционалов (в смысле теоремы Рисса-Маркова-Какутани [9, гл. I, §6, теорема 4]) может быть записана так: для любого ограниченного вещественного линейного функционала $\tau : C(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ имеются такие положительные линейные функционалы τ_+ и τ_- , что $\tau = \tau_+ - \tau_-$ и $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство, а $C(\Omega, \mathbb{R})$ — вещественная алгебра всех непрерывных функций на Ω .

Теорема 2.23 (Разложение Жордана). *Пусть ψ — самосопряженный линейный функционал на A . Тогда $\psi = \varphi_+ - \varphi_-$, где φ_+ и φ_- — положительные линейные функционалы на A , причем $\|\psi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы ≤ 1 , то есть $K \subset (A^*)_{sa}$. Тогда K — $*$ -слабо замкнутое подмножество единичного шара и, таким образом, $*$ -слабо компактно. Определим $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$\theta : A_{sa} \rightarrow C(K, \mathbb{R}), \quad \theta(a)(\tau) = \tau(a),$$

так что если $a \in A$, $a \geq 0$, то $\theta(a) \geq 0$ на K . В силу леммы 2.16 отображение θ является изометрией на образ.

Имеется естественная изометрия $\tau \mapsto \tau'$ вещественных пространств $(A^*)_{sa}$ и $(A_{sa})_{\mathbb{R}}^*$ (вещественные функционалы) (см. задачу 47). По теореме Хана-Банаха найдется такой функционал $\rho \in (C(K, \mathbb{R}))_{\mathbb{R}}^*$, что $\rho \circ \theta = \psi'$ и $\|\rho\| = \|\psi'\|$ (продолжение функционала с замкнутого подпространства $\theta(A_{sa})$). Тогда по теореме Жордана для мер (как объяснено выше перед формулировкой) найдутся такие положительные функционалы ρ_+ и ρ_- , что $\rho = \rho_+ - \rho_-$ и $\|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|$. Положим $\varphi'_+ := \rho_+ \circ \theta$ и $\varphi'_- := \rho_- \circ \theta$. Это функционалы из $(A_{sa})_{\mathbb{R}}^*$. Пусть φ_+ и φ_- соответствуют им при отождествлении с $(A^*)_{sa}$. Очевидно, что они удовлетворяют всем требованиям, кроме, быть может, условия на норму. Проверим его:

$$\|\psi\| = \|\psi'\| = \|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\| \geq \|\varphi'_+\| + \|\varphi'_-\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\| \geq \|\psi\|.$$

□

2.6 Линейные топологические пространства

Определение 2.24. Подмножество M линейного пространства называется *уравновешенным*, если для любого $v \in M$ вектор λv принадлежит M при любом $|\lambda| \leq 1$. В частности, M — звездное множество относительно нуля пространства.

Определение 2.25. Подмножество M линейного пространства называется *поглощающим*, если для любого вектора v пространства найдется такое число $\alpha > 0$, что $v \in \beta M$ при $|\beta| \geq \alpha$.

Определение 2.26. Линейное пространство, снабженное топологией, называется *линейным топологическим пространством* (ЛТП), если операции линейного пространства непрерывны.

В основном курсе функционального анализа доказываются следующие несложные утверждения (см. [6, гл. III, §5]):

Предложение 2.27. 1). База ЛТП состоит из сдвигов окрестностей нуля.

2). Любой вектор ЛТП и не содержащее его замкнутое множество имеют непесекающиеся окрестности.

Определение 2.28. ЛТП L удовлетворяет *условию гомотетии*, если для любой окрестности нуля W ее гомотетия λW — тоже окрестность нуля для любого $\lambda \neq 0$ из основного поля.

Замечание 2.29. Очевидно, что топология нормированного пространства удовлетворяет условию гомотетии.

Предложение 2.30. Для любой окрестности нуля U ЛТП L с условием гомотетии существует уравновешенная окрестность, в ней содержащаяся.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{C} \times L \rightarrow L$ (умножение), отображающее $(0, 0_L) \mapsto 0_L$. Тогда, в силу непрерывности, найдутся такие $\delta > 0$ и окрестность нуля W , что $\lambda W \subseteq U$ при $|\lambda| \leq \delta$ (добиться нестрогого неравенства можно, уменьшив δ из стандартного определения). Положим $W' := \cup_{0 < |\lambda| \leq \delta} \lambda W$. В силу 2.28, это W' — искомое. $\square$

Замечание 2.31. На самом деле, можно доказать, что базу окрестностей нуля ЛТП L можно выбрать из поглощающих уравновешенных множеств, а также, что условие гомотетии фактически не является условием, но нам это не понадобится (см. [1, §8.1]).

Нам будет нужен следующий важный результат.

Теорема 2.32. Пусть L — конечномерное пространство, $\dim L = n$. Тогда любая хаусдорфова топология τ , превращающая L в линейное топологическое пространство L_τ с условием гомотетии, совпадает с топологией евклидовой нормы $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^i|^2$, где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис L , а $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$.

Доказательство. Пространство L с евклидовой (или унитарной) топологией будем обозначать L_u , а окрестности нуля двух топологий — τ и евклидовой — обозначим через T и U , соответственно.

Рассмотрим произвольную T . Тогда найдется такая окрестность T_0 , что $T_0 + \dots + T_0 \subset T$ (n слагаемых) в силу непрерывности операции сложения. Для каждого k найдется такое $\varepsilon_k > 0$, что $v^k e_k \in T_0$ при $|v_k| < \varepsilon_k$ ($k = 1, \dots, n$). Пусть $\varepsilon := \min_k \varepsilon_k$, а $U := \{v \in L \mid \|v\| < \varepsilon\}$. Тогда $v^k e_k \in T_0$ для любого $v \in U$ и любого $k = 1, \dots, n$. Значит, $U \subset T$. Из доказанного, в частности, следует, что тождественное отображение $\iota : L_u \rightarrow L_\tau$ является непрерывным.

Обратно, пусть U — произвольная окрестность, можно считать, что $U = B(0, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε с границей (сферой) S , являющейся компактным множеством. Тогда $S = \iota(S)$ компактно в L_τ . Значит, оно замкнуто, поскольку топология хаусдорфова. Тогда найдется звездная окрестность нуля T (например, уравновешенная), не пересекающаяся с S в силу предложений 2.27 и 2.30. При этом $T \subseteq U$, поскольку иначе существует такой вектор $v \in T$, что $\|v\| \geq \varepsilon$, и если положить $\alpha := \varepsilon/\|v\|$, $w := \alpha v$, то $\alpha \leq 1$, так что $w \in T$ в силу звездности. Но $\|w\| = \varepsilon$, так что $w \in T \cap S = \emptyset$. Противоречие. $\square$