Лекция 9

Теорема 2.22 (Разложение Жордана). *Пусть ψ — самосопряженный линейный функционал на A. Тогда $\psi = \varphi_+ - \varphi_-$, где φ_+ и φ_- — положительные линейные функционалы на A, причем $\|\psi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы $\leqslant 1$, то есть $K \subset (A^*)_{sa}$. Тогда K — $*$-слабо замкнутое подмножество единичного шара и, таким образом, $*$-слабо компактно. Определим $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$\theta : A_{sa} \to C(K, \mathbb{R}), \qquad \theta(a)(\tau) = \tau(a),$$

так что если $a \in A$, $a \geqslant 0$, то $\theta(a) \geqslant 0$ на K. В силу леммы 2.16 отображение θ является изометрией на образ.

Имеется естественная изометрия $\tau \mapsto \tau'$ вещественных пространств $(A^*)_{sa}$ и $(A_{sa})^*_{\mathbb{R}}$ (вещественные функционалы) (см. задачу 46). По теореме Хана-Банаха найдется такой функционал $\rho \in (C(K,\mathbb{R}))^*_{\mathbb{R}}$, что $\rho \circ \theta = \psi'$ и $\|\rho\| = \|\psi'\|$ (продолжение функционала с замкнутого подпространства $\theta(A_{sa})$). Тогда по теореме Жордана для мер (как объяснено выше перед формулировкой) найдутся такие положительные функционалы ρ_+ и ρ_-, что $\rho = \rho_+ - \rho_-$ и $\|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|$. Положим $\varphi'_+ := \rho_+ \circ \theta$ и $\varphi'_- := \rho_- \circ \theta$. Это функционалы из $(A_{sa})^*_{\mathbb{R}}$. Пусть φ_+ и φ_- соответствуют им при отождествлении с $(A^*)_{sa}$. Очевидно, что они удовлетворяют всем требованиям, кроме, быть может, условия на норму. Проверим его:

$$\|\psi\| = \|\psi'\| = \|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\| \geqslant \|\varphi'_+\| + \|\varphi'_-\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\| \geqslant \|\psi\|.$$

□

2.6 Линейные топологические пространства

Определение 2.23. Подмножество M линейного пространства называется *уравновешенным*, если для любого $v \in M$ вектор λv принадлежит M при любом $|\lambda| \leqslant 1$. В частности, M — звездное множество относительно нуля пространства.

Определение 2.24. Подмножество M линейного пространства называется *поглощающим*, если для любого вектора v пространства найдется такое число $\alpha > 0$, что $v \in \beta M$ при $|\beta| \geqslant \alpha$.

Определение 2.25. Линейное пространство, снабженное топологией, называется *линейным топологическим пространством* (ЛТП), если операции линейного пространства непрерывны.

В основном курсе функционального анализа доказываются следующие несложные утверждения (см. [4, гл. III, §5]):

Предложение 2.26. *1). База ЛТП состоит из сдвигов окрестностей нуля.*

2). Любой вектор ЛТП и не содержащее его замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности.

Определение 2.27. ЛТП L удовлетворяет *условию гомотетии*, если для любой окрестность нуля W ее гомотетия λW — тоже окрестность нуля для любого $\lambda \neq 0$ из основного поля.

Замечание 2.28. Очевидно, что топология нормированного пространства удовлетворяет условию гомотетии.

Предложение 2.29. *Для любой окрестности нуля U ЛТП L с условием гомотетии существует уравновешенная окрестность, в ней содержащаяся.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{C} \times L \to L$ (умножение), отображающее $(0, 0_L) \mapsto 0_L$. Тогда, в силу непрерывности, найдутся такие $\delta > 0$ и окрестность нуля W, что $\lambda W \subseteq U$ при $|\lambda| \leqslant \delta$ (добиться нестрогого неравенства можно, уменьшив δ из стандартного определения). Положим $W' := \cup_{0<|\lambda|\leqslant 1} \lambda W$. В силу 2.27, это W' — искомое. □

Замечание 2.30. На самом деле, можно доказать, что базу окрестностей нуля ЛТП L можно выбрать из поглощающих уравновешенных множеств, а также, что условие гомотетии фактически не является условием, но нам это не понадобится (см. [5, гл. II, §4]).

Нам будет нужен следующий важный результат.

Теорема 2.31. *Пусть L — конечномерное пространство, $\dim L = n$. Тогда любая хаусдорфова топология τ, превращающая L в линейное топологическое пространство L_τ с условием гомотетии, совпадает с топологией евклидовой нормы $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^i|^2$, где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис L, а $v = v^1 e_1 + \cdots v^n e_n$.*

Доказательство. Пространство L с евклидовой (или унитарной) топологией будем обозначать L_u, а окрестности нуля двух топологий — τ и евклидовой — обозначим через T и U, соответственно.

Рассмотрим произвольную T. Тогда найдется такая окрестность T_0, что $T_0 + \cdots + T_0 \subset T$ (n слагаемых) в силу непрерывности операции сложения. Для каждого k найдется такое $\varepsilon_k > 0$, что $v^k e_k \in T_0$ при $|v_k| < \varepsilon_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Пусть $\varepsilon := \min_k \varepsilon_k$, а $U := \{v \in L \,|\, \|v\| < \varepsilon\}$. Тогда $v^k e_k \in T_0$ для любого $v \in U$ и любого $k = 1, \dots, n$. Значит, $U \subset T$. Из доказанного, в частности, следует, что тождественное отображение $\iota : L_u \to L_\tau$ является непрерывным.

Обратно, пусть U — произвольная окрестность, можно считать, что $U = B(0, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε с границей (сферой) S, являющейся компактным множеством. Тогда $S = \iota(S)$ компактно в L_τ. Значит, оно замкнуто, поскольку топология хаусдорфова. Тогда найдется звездная окрестность нуля T (например, уравновешенная), не пересекающаяся с S в силу предложений 2.26 и 2.29. При этом $T \subseteq U$, поскольку иначе существует такой вектор $v \in T$, что $\|v\| \geqslant \varepsilon$, и если положить $\alpha := \varepsilon / \|v\|$, $w := \alpha v$, то $\alpha \leqslant 1$, так что $w \in T$ в силу звездности. Но $\|w\| = \varepsilon$, так что $w \in T \cap S = \varnothing$. Противоречие. □

2.7 Конечномерные C^*-алгебры

Рассмотрим $*$-слабую топологию на A, задаваемую системой полунорм $a \mapsto |\varphi(a)|$ для всех линейных функционалов φ. Из леммы 2.20 и теоремы 2.22 следует, что ту же топологию можно получить, ограничиваясь только полунормами, связанными с состояниями.

Заметим также, что соответствующее ЛТП обладает свойством гомотетии 2.27.

Лемма 2.32. *Конечномерная C^*-алгебра всегда имеет единицу.*

Доказательство. Если A конечномерна, то топология нормы совпадает с $*$-слабой топологией по теореме 2.31. Пусть u_n — аппроксимативная единица алгебры A. Тогда для любого состояния φ последовательность $\varphi(u_n)$ является неубывающей и ограниченной. Поэтому u_n сходится в $*$-слабой топологии, а значит, и по норме. Таким образом, имеется предел $\lim_n u_n = a$. Тогда $ax = xa = x$ для любого $x \in A$, так что $a = 1$. □

Лемма 2.33. *Пусть $I \subset A$ — идеал в конечномерной C^*-алгебре A. Тогда $I = Ap$ для некоторого центрального проектора (=идемпотента из центра) p.*

Доказательство. Поскольку I конечномерен, то унитален по лемме 2.32. Пусть $p \in I$ — единица I. Тогда для всякого $x \in A$ выполняется $xp \in I$, так что $p(xp) = xp$. Поэтому $px^*p = x^*p$ для любого $x \in A$, откуда $xp = pxp = px$ и p принадлежит центру A. Очевидно, что $p^2 = p$. □

Лемма 2.34. *Простая конечномерная C^*-алгебра A изометрически $*$-изоморфна матричной алгебре M_n для некоторого n.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $aAb \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in A$. Действительно, AaA является ненулевым идеалом (так как A с единицей и $0 \neq a = 1 \cdot a \cdot 1 \in A$), так что в силу простоты, $AaA = A$. Поэтому $1 = \sum_i x_i a y_i$ и $b = \sum_i x_i a y_i b$. Поэтому, если $ayb = 0$ для любого $y \in A$, то $b = \sum_i x_i(ay_i b) = 0$, что противоречит предположению.

Пусть B — некоторая максимальная коммутативная подалгебра A. Тогда она может быть отождествлена с $C(X) = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \cdot e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C} \cdot e_n$ для некоторого n, где X состоит из n точек, а $e_i \in B$ обозначает элемент, соответствующий характеристической функции в точке i. При этом e_i являются проекторами с соотношениями $e_i e_j = 0$ для $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Поскольку $e_i A e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i A e_i = 0$ а B максимальная, то $e_i A e_i \subset B$. Поэтому $e_i A e_i = \mathbb{C} \cdot e_i$ (поскольку, очевидно, $0 \neq e_i A e_i \ni e_i$, или можно воспользоваться утверждением из начала доказательства).

Для любых i, j найдется такой $x = x_{ij} \in A$, что $x = e_i x e_j \neq 0$, $\|x\| = 1$. Действительно, в силу утверждения из начала доказательства, $e_i A e_j \neq 0$, так что имеется $x = e_i y e_j$ с $\|x\| = 1$. При этом $e_i x e_j = e_i e_i y e_j e_j = e_i y e_j = x$. Тогда $x^*x = e_j x^* e_i e_i x e_j \in e_j A e_j$, а значит, по доказанному, имеет вид αe_j, $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как x^*x — положительный элемент, по норме равный единице, то $\alpha = 1$, так что $x^*x = e_j$. Аналогично, $xx^* = e_i$. Обозначим такой $x = x_{ij}$ для $j = 1$ через u_i, так что $u_i =$

$e_i x e_1 = e_i u_i e_1$. Тогда $u_i^* u_i = e_1$, $u_i u_i^* = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $u_{ij} := u_i u_j^*$. При этом $u_i e_1 u_i^* = u_i u_i^* u_i u_i^* = e_i e_i = e_i$, так что $u_{ij} u_{ji} = u_i u_j^* u_j u_i^* = u_i e_1 u_i^* = e_i$. Также $e_j u_{ji} = u_j u_j^* u_j u_i^* = u_j e_1 u_i^* = u_j u_i^* u_i u_i^* = u_{ji} e_i$, и $e_i u_{ij} = u_i u_i^* u_i u_j^* = u_i e_1 u_j^* = u_i u_j^* u_j u_j^*$.

Если $x \in e_i A e_j$, то есть $x = e_i a e_j$, то $x u_{ji} = e_i a e_j u_{ji} = e_i a u_{ji} e_i \in e_i A e_i$, так что $x u_{ji} = \lambda e_i$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $x = x e_j = x u_{ji} u_{ij} = \lambda e_i u_{ij} = \lambda u_{ij}$, так что для любого $x \in A$ существует такое число $\lambda_{ij}(x) \in \mathbb{C}$, что $e_i x e_j = \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Таким образом, $x = \sum_{i,j} e_i x e_j = \sum_{ij} \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Соответствие $x \mapsto (\lambda_{ij}(x))$ определяет изоморфизм $\kappa : A \to M_n$ (задача 47). □

Задача 47. Проверить биективность и необходимые алгебраические свойства κ.

Теорема 2.35. *Если A конечномерна, то $A = \oplus_k A p_k$, где p_k — центральные проекторы, а каждая $A p_k$ — матричная алгебра $M_{n(k)}$.*

Доказательство. Для простой алгебры результат следует из леммы 2.34. Если A не является простой, то $I = Ap$ по лемме 2.33, где p — центральный проектор. Тогда $A = I \oplus J$, где $J := A(1-p)$. Тогда J — тоже идеал, поскольку $(1-p)$ — тоже центральный проектор, так что $A(1-p)A = AA(1-p) \subseteq A(1-p)$. При этом центр A, будучи конечномерной коммутативной алгеброй, изоморфен $\mathbb{C}^m$ (функциям на конечном множестве), а проекторам соответствуют характеристические функции. Далее рассуждаем по индукции, уменьшая размерность, пока не придем к сумме простых алгебр. □