Лекция 9

Теорема 2.22 (Разложение Жордана). *Пусть ψ — самосопряженный линейный функционал на A. Тогда $\psi = \varphi_+ - \varphi_-$, где φ_+ и φ_- — положительные линейные функционалы на A, причем $\|\psi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы $\leqslant 1$, то есть $K \subset (A^*)_{sa}$. Тогда K — $*$-слабо замкнутое подмножество единичного шара и, таким образом, $*$-слабо компактно. Определим $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$\theta : A_{sa} \to C(K, \mathbb{R}), \qquad \theta(a)(\tau) = \tau(a),$$

так что если $a \in A$, $a \geqslant 0$, то $\theta(a) \geqslant 0$ на K. В силу леммы 2.16 отображение θ является изометрией на образ.

Имеется естественная изометрия $\tau \mapsto \tau'$ вещественных пространств $(A^*)_{sa}$ и $(A_{sa})^*_{\mathbb{R}}$ (вещественные функционалы) (см. задачу 46). По теореме Хана-Банаха найдется такой функционал $\rho \in (C(K,\mathbb{R}))^*_{\mathbb{R}}$, что $\rho \circ \theta = \psi'$ и $\|\rho\| = \|\psi'\|$ (продолжение функционала с замкнутого подпространства $\theta(A_{sa})$). Тогда по теореме Жордана для мер (как объяснено выше перед формулировкой) найдутся такие положительные функционалы ρ_+ и ρ_-, что $\rho = \rho_+ - \rho_-$ и $\|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|$. Положим $\varphi'_+ := \rho_+ \circ \theta$ и $\varphi'_- := \rho_- \circ \theta$. Это функционалы из $(A_{sa})^*_{\mathbb{R}}$. Пусть φ_+ и φ_- соответствуют им при отождествлении с $(A^*)_{sa}$. Очевидно, что они удовлетворяют всем требованиям, кроме, быть может, условия на норму. Проверим его:

$$\|\psi\| = \|\psi'\| = \|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\| \geqslant \|\varphi'_+\| + \|\varphi'_-\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\| \geqslant \|\psi\|.$$

□

2.6 Линейные топологические пространства

Определение 2.23. Подмножество M линейного пространства называется *уравновешенным*, если для любого $v \in M$ вектор λv принадлежит M при любом $|\lambda| \leqslant 1$. В частности, M — звездное множество относительно нуля пространства.

Определение 2.24. Подмножество M линейного пространства называется *поглощающим*, если для любого вектора v пространства найдется такое число $\alpha > 0$, что $v \in \beta M$ при $|\beta| \geqslant \alpha$.

Определение 2.25. Линейное пространство, снабженное топологией, называется *линейным топологическим пространством* (ЛТП), если операции линейного пространства непрерывны.

В основном курсе функционального анализа доказываются следующие несложные утверждения (см. [4, гл. III, §5]):

Предложение 2.26. *1). База ЛТП состоит из сдвигов окрестностей нуля.*

2). Любой вектор ЛТП и не содержащее его замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности.

Определение 2.27. ЛТП L удовлетворяет *условию гомотетии*, если для любой окрестность нуля W ее гомотетия λW — тоже окрестность нуля для любого $\lambda \neq 0$ из основного поля.

Замечание 2.28. Очевидно, что топология нормированного пространства удовлетворяет условию гомотетии.

Предложение 2.29. *Для любой окрестности нуля U ЛТП L с условием гомотетии существует уравновешенная окрестность, в ней содержащаяся.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{C} \times L \to L$ (умножение), отображающее $(0, 0_L) \mapsto 0_L$. Тогда, в силу непрерывности, найдутся такие $\delta > 0$ и окрестность нуля W, что $\lambda W \subseteq U$ при $|\lambda| \leqslant \delta$ (добиться нестрогого неравенства можно, уменьшив δ из стандартного определения). Положим $W' := \cup_{0<|\lambda|\leqslant 1} \lambda W$. В силу 2.27, это W' — искомое. □

Замечание 2.30. На самом деле, можно доказать, что базу окрестностей нуля ЛТП L можно выбрать из поглощающих уравновешенных множеств, а также, что условие гомотетии фактически не является условием, но нам это не понадобится (см. [5, гл. II, §4]).

Нам будет нужен следующий важный результат.

Теорема 2.31. *Пусть L — конечномерное пространство, $\dim L = n$. Тогда любая хаусдорфова топология τ, превращающая L в линейное топологическое пространство L_τ с условием гомотетии, совпадает с топологией евклидовой нормы $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^i|^2$, где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис L, а $v = v^1 e_1 + \cdots v^n e_n$.*

Доказательство. Пространство L с евклидовой (или унитарной) топологией будем обозначать L_u, а окрестности нуля двух топологий — τ и евклидовой — обозначим через T и U, соответственно.

Рассмотрим произвольную T. Тогда найдется такая окрестность T_0, что $T_0 + \cdots + T_0 \subset T$ (n слагаемых) в силу непрерывности операции сложения. Для каждого k найдется такое $\varepsilon_k > 0$, что $v^k e_k \in T_0$ при $|v_k| < \varepsilon_k$ ($k = 1, \dots, n$). Пусть $\varepsilon := \min_k \varepsilon_k$, а $U := \{v \in L \mid \|v\| < \varepsilon\}$. Тогда $v^k e_k \in T_0$ для любого $v \in U$ и любого $k = 1, \dots, n$. Значит, $U \subset T$. Из доказанного, в частности, следует, что тождественное отображение $\iota : L_u \to L_\tau$ является непрерывным.

Обратно, пусть U — произвольная окрестность, можно считать, что $U = B(0, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε с границей (сферой) S, являющейся компактным множеством. Тогда $S = \iota(S)$ компактно в L_τ. Значит, оно замкнуто, поскольку топология хаусдорфова. Тогда найдется звездная окрестность нуля T (например, уравновешенная), не пересекающаяся с S в силу предложений 2.26 и 2.29. При этом $T \subseteq U$, поскольку иначе существует такой вектор $v \in T$, что $\|v\| \geqslant \varepsilon$, и если положить $\alpha := \varepsilon / \|v\|$, $w := \alpha v$, то $\alpha \leqslant 1$, так что $w \in T$ в силу звездности. Но $\|w\| = \varepsilon$, так что $w \in T \cap S = \varnothing$. Противоречие. □