

C^* -алгебры и K -теория. Начальный курс

В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий

19 сентября 2026 г.

Глава 1

C^* -алгебры

Лекция 1 (14.09.2026)

1.1 Определение и первые примеры

Определение 1.1. Алгеброй A (над полем $\mathbb{K}$) называется кольцо, являющееся линейным пространством над $\mathbb{K}$, причем сложение в определении кольца и в определении линейного пространства одно и то же, а умножения связаны соотношением $\lambda(ab) = (\lambda a)b$ для всяких $\lambda \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$.

Мы будем рассматривать алгебры только над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 1.2. Алгебра A над $\mathbb{C}$ называется *банаховой алгеброй*, если подлежащее линейное пространство является банаховым пространством и $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ для любых $a, b \in A$.

Задача 1 (легкая). Покажите, что в этом случае умножение непрерывно (как отображение $A \times A \rightarrow A$).

Определение 1.3. Отображение $*$: $A \rightarrow A$, $a \mapsto a^*$ называется *инволюцией*, если

1. $(a^*)^* = a$;
2. $(a + b)^* = a^* + b^*$;
3. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$;
4. $(ab)^* = b^*a^*$;
5. $\|a^*\| = \|a\|$

для любых $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Банахова алгебра с инволюцией называется *инволютивной банаховой алгеброй*.

Определение 1.4. Инволютивная банахова алгебра A называется C^* -алгеброй, если инволюция удовлетворяет равенству $\|a^*a\| = \|a\|^2$ для всех $a \in A$ (это равенство называется C^* -свойством).

Задача 2. Привести пример инволютивной банаховой алгебры, не являющейся C^* -алгеброй.

Задача 3 (легкая). Показать, что свойство (5) определения 1.3 следует из свойств (1 – 4) и C^* -свойства.

Определение 1.5. Элемент $1 \in A$ называется (левым) *единичным*, если $1a = a$ для любого $a \in A$. C^* -алгебра A называется *унитальной* или *алгеброй с единицей*, если у нее имеется (левый) единичный элемент.

Задача 4. Показать, что левый единичный элемент является и правым, что $1^* = 1$, что единичный элемент единствен и что $\|1\| = 1$. Он называется *единицей алгебры*.

Задача 5. Проверьте, что алгебра $C(X)$, образованная всеми непрерывными комплекснозначными функциями на компактном пространстве X и алгебра $C_0(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве X , стремящихся к 0 на бесконечности (то есть таких $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subseteq X$, что $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} < \varepsilon$) являются коммутативными C^* -алгебрами, если в качестве нормы берется *супремум-норма*: $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, а в качестве умножения — поточечное умножение. При этом алгебра $C(X)$ имеет единицу.

Задача 6. Проверьте, что алгебра $\mathbb{B}(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H , является C^* -алгеброй с единицей. Здесь в качестве нормы берется *операторная норма* $\|a\| = \sup_{h \in H, \|h\| \leq 1} \|a(h)\|$, а умножение — композиция операторов.

Эти примеры C^* -алгебр являются важнейшими, как мы увидим дальше.

1.2 Унитализация, или присоединение единицы

Если у инволютивной банаховой алгебры A нет единицы, то ее можно вложить в инволютивную банахову алгебру A с единицей следующим образом. Положим $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ как линейное пространство (прямая сумма линейных пространств). Определим структуру инволютивной банаховой алгебры на A^+ формулами

$$\begin{aligned} (a, \lambda)(b, \mu) &= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \\ (a, \lambda)^* &= (a^*, \bar{\lambda}), \\ \|(a, \lambda)\| &= \|a\| + |\lambda| \end{aligned} \tag{1.1}$$

для любых $(a, \lambda), (b, \mu) \in A \oplus \mathbb{C}$.

Далее считаем, что исходная алгебра A является C^* -алгеброй.

Задача 7. Показать, что эта норма превращает A^+ в инволютивную банахову алгебру, но не в C^* -алгебру. (Для проверки полноты воспользуйтесь полнотой подпространства $A \subset A^+$ конечной (единичной) коразмерности, что следует из задачи 257 в [5].)

Определение 1.6. Подмножество $B \subseteq A$ называется *подалгеброй* (банаховой) алгебры A , если B является алгеброй относительно операций (и нормы) A .

Подмножество $B \subseteq A$ называется *(C^* -)подалгеброй* C^* -алгебры A , если B является C^* -алгеброй относительно операций и нормы A . В частности, B замкнута в A .

Определение 1.7. Подалгебра $I \subseteq A$ называется (двусторонним) *идеалом*, если $aI \subseteq I$ и $Ia \subseteq I$ для любого $a \in A$.

Задача 8. Доказать, что A — идеал в A^+ .

Лемма 1.8. На A^+ имеется норма, которая

- 1) эквивалентна определенной выше;
- 2) на A совпадает с исходной нормой;
- 3) является C^* -нормой.

Доказательство. Для $b = (b', \lambda) \in A^+$ рассмотрим линейное отображение $L_b : A \rightarrow A$ по формуле $L_b(a) = ba$, $a \in A$. Для L_b , таким образом, можно определить операторную норму: $\|L_b\| := \sup_{a \in A, \|a\| \leq 1} \|L_b(a)\|$. Если $b \in A$, то $\|L_b\| \leq \|b\|$. Поскольку $\|L_b(b^*)\| = \|bb^*\| = \|b\|^2$, то $\|L_b\| = \|b\|$. Для всякого $b = (b', \lambda) \in A^+$ положим $\|b\|_{new} = \|L_b\|$. Заметим, что проведенное рассуждение показывает, что $\|\cdot\|_{new}$ удовлетворяет условию 2) из формулировки леммы.

Прежде всего, проверим $\|\cdot\|_{new}$ является нормой. Очевидно, что аксиомы линейности и треугольника выполнены (то есть это — *полунорма*, или *преднорма*), так что остается проверить невырожденность.

Лекция 2 (21.09.2026)

Пусть $\|b\|_{new} = 0$ для некоторого $b = (b', \lambda) \in A^+$. Это означает, что $(b', \lambda) \cdot (a, 0) = (b'a + \lambda a, 0) = (0, 0)$ для любого $a \in A$, так что $-\frac{1}{\lambda}b' \cdot a = a$ и $-\frac{1}{\lambda}b'$ является единицей A . Но у A нет единицы. Значит, $\|\cdot\|_{new}$ — норма. Как всякая операторная норма, новая норма — норма на банаховой алгебре, то есть

$$\|bc\|_{new} \leq \|b\|_{new}\|c\|_{new} \quad (1.2)$$

для любых $b, c \in A^+$ (Легкая задача: проверьте это). Пока мы не утверждаем, что инволюция является изометрией.

Эта новая норма эквивалентна определенной ранее норме на A^+ , поскольку $A \subset A^+$ является подпространством коразмерности 1. Действительно, по неравенству треугольника, имеем $\|(a, \lambda)\|_{new} \leq \|a\| + |\lambda| = \|(a + \lambda)\|$, так что достаточно показать, что

найдется такая константа $c > 0$, что $\|(a, \lambda)\|_{new} \geq c\|(a, \lambda)\|$. Предположим противное: существуют такие пары (a_n, λ_n) и числа $c_n > 0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ и

$$\|(a_n, \lambda_n)\|_{new} \leq c_n \|(a_n, \lambda_n)\|.$$

Поскольку ни одно λ_n не равно нулю, мы можем предположить (поделив, при необходимости, обе стороны на $\lambda_n \neq 0$), что $\lambda_n = 1$. Снова применяя неравенство треугольника, получаем

$$\|a_n\| - 1 \leq \|(a_n, 1)\|_{new} \leq c_n(\|a_n\| + 1),$$

откуда $\|a_n\| \leq \frac{1+c_n}{1-c_n}$, и для достаточно больших n имеем $\|a_n\| < 2$. Но тогда для этих n имеем $\|(a_n, 1)\|_{new} \leq 3c_n$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, 1) = 0. \quad (1.3)$$

Теперь вспомним, что $A^+/A \cong \mathbb{C}$, а все нормы на $\mathbb{C}$ эквивалентны (более того, они отличаются лишь постоянным множителем). Таким образом, фактор-норма на A^+/A , задаваемая $\|(a, \lambda) + A\|_{new} := \inf_{a \in A} \|(a, \lambda)\|_{new}$ эквивалентна обычной норме на $\mathbb{C}$. Значит, $\inf_{a \in A} \|(a, 1)\|_{new} = \alpha > 0$, что противоречит (1.3).

Теперь нам надо проверить C^* -свойство. По определению, для любого $b \in A^+$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in A$, что $\|a\| = 1$ и

$$\|L_b(a)\| \geq (1 - \varepsilon)\|L_b\|, \quad \text{то есть} \quad \|ba\|_{new} = \|ba\| \geq (1 - \varepsilon)\|b\|_{new}.$$

Также имеем

$$\|b^*b\|_{new} \geq \|a^*(b^*b)a\|_{new} = \|a^*(b^*b)a\| = \|(ba)^*(ba)\| = \|ba\|^2 \geq (1 - \varepsilon)^2 \|b\|_{new}^2$$

(где первое неравенство выполнено в силу (1.2), следующее равенство — в силу того, что A является идеалом в A^+ , а дальше применяем C^* -свойство в A). Переходя к пределу при ε , стремящемся к нулю, получаем $\|b^*b\|_{new} \geq \|b\|_{new}^2$. В частности, $\|b^*\|_{new} \cdot \|b\|_{new} \geq \|b^*b\|_{new} \geq \|b\|_{new}^2$, так что $\|b^*\|_{new} \geq \|b\|_{new}$. Поэтому $\|b\|_{new} = \|(b^*)^*\|_{new} \geq \|b^*\|_{new}$. Таким образом, инволюция является изометрией и, по (1.2), $\|b^*b\|_{new} \leq \|b^*\|_{new}\|b\|_{new} = \|b\|_{new}^2$. Значит, это — C^* -норма. $\square$

Определение 1.9. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$, *унитарным*, если $a^*a = 1$ и $aa^* = 1$ (тут алгебра A предполагается унитарной), *нормальным*, если $a^*a = aa^*$.

Определение 1.10. В унитарной C^* -алгебре элемент a называется *обратимым*, если существует такой элемент $a' \in A$, что $aa' = a'a = 1$. Элемент a' с таким свойством единствен (проверьте!), он называется *обратным к a* и обозначается через a^{-1} . Множество обратимых элементов $G(A)$ является группой.

Задача 9. Проверьте это.

Лемма 1.11. Если $\|1 - a\| < 1$, то a^{-1} существует и равен $a' = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n$, причем ряд сходится по норме.

Доказательство. Сходимость сразу следует из оценки через геометрическую прогрессию. Далее вычисляем: $a'a = aa' = -(1 - a)a' + a' = -\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n = 1$. $\square$

Замечание 1.12. Очевидно, что выкладка, а значит, и утверждение леммы остается верным для произвольной банаховой алгебры.

Задача 10. Доказать аналогичным образом, что если $a_0 \in A$ обратим и $\|a - a_0\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$, то a тоже обратим, причем $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$.

Следствие 1.13. Подмножество $G(A) \subset A$ является открытым множеством. Взятие обратного элемента $a \mapsto a^{-1}$ является непрерывным отображением $G(A)$ в себя.

Задача 11. Докажите следствие, используя установленные выше формулы.

1.3 Спектр и функциональное исчисление

Определение 1.14. Пусть A — банахова алгебра с единицей. Для любого $a \in A$ назовем множество $\text{Sp}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda 1) \text{ не является обратимым}\}$ спектром элемента a . Функция $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ называется резольвентой a . Если A — C^* -алгебра без единицы, то квазиспектр $\text{Sp}'(a)$ элемента $a \in A$ полагается равным спектру a как элемента алгебры A^+ .

Задача 12. Показать, что квазиспектр всегда содержит ноль.

Теорема 1.15. Спектр любого элемента является компактным непустым множеством. Резольвента является аналитической функцией вне спектра (то есть для любой точки пополненной комплексной плоскости из дополнения к спектру представляется степенным рядом с коэффициентами из алгебры, равномерно сходящимся на некотором замкнутом диске).

Доказательство. Если $|\lambda| > \|a\|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} a^n$ сходится по норме, причем сходится к $-(a - \lambda 1)^{-1}$, поскольку $-(a - \lambda 1) \sum_{n=0}^k \lambda^{-(n+1)} a^n = 1 - \lambda^{-(k+2)} a^{k+1}$ сходится к 1. Таким образом, $R_a(\lambda)$ является аналитической в окрестности бесконечности $|\lambda| > \|a\|$ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_a(\lambda)\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}} = 0.$$

В частности, $\text{Sp}(a)$ содержится в замкнутом диске радиуса $\|a\|$ и, тем самым, является ограниченным множеством.

Если $a - \lambda_0 1$ является обратимым (то есть $\lambda_0 \notin \text{Sp}(a)$) и $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(a - \lambda_0 1)^{-1}\|}$ то, аналогичным образом,

$$(a - \lambda 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda_0 1)^{-n-1}$$

является рядом Тейлора R_a в окрестности λ_0 , так что $R_a(\lambda)$ является аналитической вне $\text{Sp}(a)$. Это же рассуждение показывает, в частности, что дополнение к $\text{Sp}(a)$ открыто, то есть $\text{Sp}(a)$ замкнуто. Так как спектр ограничен, то он компактен.

Поскольку $R_a(\lambda)$ является аналитической, то комплекснозначная функция $\lambda \mapsto \varphi(R_a(\lambda))$ тоже является аналитической, если φ — произвольный ограниченный линейный функционал на A . Если $\text{Sp}(a)$ пуст, то $\varphi(R_a(\lambda))$ — аналитическая функция на всем $\mathbb{C}$. При этом она ограничена, поскольку $|\varphi(R_a(\lambda))| \leq \|\varphi\| \cdot \|R_a(\lambda)\|$ а $\|R_a(\lambda)\|$ ограничено — оцениваем по отдельности на компактном диске радиуса $\lambda_0 > \|a\|$ и вне его через полученную выше оценку

$$\|R_a(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \leq \frac{1}{|\lambda_0| - \|a\|}.$$

Значит, $\varphi(R_a(\lambda)) = 0$ для любого φ , поэтому $R_a(\lambda) = 0$ (см. задачу 13 ниже) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, что невозможно (получается, что $\lambda_1 1 - \lambda_2 1 = 0$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$). $\square$

Задача 13. Если имеется элемент $x \neq 0$ в нормированном пространстве X , то имеется непрерывный линейный функционал φ , не обращающийся на x в ноль. (Это теорема из стандартного курса, следствие теоремы Хана–Банаха, см. например, следствие 2 на стр. 189 в [6]).

Задача 14. Пусть a и b — коммутирующие элементы банаховой алгебры. Тогда произведение ab обратимо тогда и только тогда, когда каждый из элементов a и b является обратимым.

Теорема 1.16 (Теорема об отображении спектра). *Если $p(z)$ является многочленом, то $\text{Sp}(p(a)) = p(\text{Sp}(a))$.*

Доказательство. При $\alpha \in \mathbb{C}$ разложим $p(z) - \alpha$ на линейные множители $p(z) - \alpha = c \prod_i (z - \beta_i)$. Тогда $p(a) - \alpha 1 = c \prod_i (a - \beta_i 1)$ и $p(a) - \alpha 1$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы все $a - \beta_i 1$ (применяя индуктивно задачу 14). Поэтому $\alpha \in \text{Sp}(p(a))$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из β_i принадлежит $\text{Sp}(a)$. С другой стороны, подставляя это β_{i_0} в исходное разложение, получаем $p(\beta_{i_0}) - \alpha = c \prod_i (\beta_{i_0} - \beta_i) = 0$, то есть $\alpha = p(\beta_{i_0})$. Обратное включение получается аналогично. $\square$

Лемма 1.17. *Пусть A — C^* -алгебра (с единицей). Тогда $\text{Sp}(a^*) = \overline{\text{Sp}(a)}$. Если a — унитарный, то $\text{Sp}(a) \subset \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ — единичная окружность.*

Доказательство. Поскольку $a^*(a^{-1})^* = (a^{-1}a)^* = 1^* = 1$, и аналогично, в другом порядке, то элемент обратим тогда и только тогда, когда обратим его сопряженный. Это дает первое утверждение.

Пусть теперь a — унитарный, в частности, обратимый. Тогда $\|a\|^2 = \|a^*a\| = 1$, так что при $|\lambda| > 1$ имеем $\lambda \notin \text{Sp}(a)$. Если же $|\lambda| < 1$, то $1 - \lambda a^*$ обратим, а значит, обратим и $a(1 - \lambda a^*) = a - \lambda 1$. Таким образом, $\text{Sp}(a) \subset \mathbb{S}^1$. $\square$

Определение 1.18. Число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(a)\}$ называется *спектральным радиусом* a .

Задача 15. Показать, что $r(a) \leq \|a\|$ для любого $a \in A$.

Лемма 1.19. $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Доказательство. Разложим резольвенту R_a в окрестности бесконечности: $R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$. Эта функция является аналитической при $|\lambda| > r(a)$, так что для любого $\rho > r(a)$ общий член стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\frac{a^n}{\rho^{n+1}}\| = 0$. Поэтому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \rho$ для любого $\rho > r(a)$, так что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a). \quad (1.4)$$

С другой стороны, в силу компактности спектра, найдется такое $\alpha \in \text{Sp}(a)$, что $|\alpha| = r(a)$. По теореме об отображении спектра, $\alpha^n \in \text{Sp}(a^n)$, поэтому $|\alpha^n| \leq r(a^n)$. По задаче 15, $r(a^n) \leq \|a^n\|$. Объединяя, получаем

$$r(a) = |\alpha| = (|\alpha^n|)^{1/n} \leq (r(a^n))^{1/n} \leq \|a^n\|^{1/n}$$

для всех n , так что

$$r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n}. \quad (1.5)$$

Сравнивая (1.4) и (1.5), заключаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ существует и равен $r(a)$. $\square$

1.4 Мультипликативные функционалы и максимальные идеалы коммутативных банаховых алгебр

Напомним, что алгебра A называется *простой*, если у нее нет собственных (т.е., отличных от $\{0\}$ и A) идеалов.

Лемма 1.20. Алгебра комплексных чисел $\mathbb{C}$ является единственной простой коммутативной банаховой алгеброй.

Доказательство. Если $A \neq \mathbb{C}$, то имеется нескаллярный элемент $a \in A$ (то есть $a \neq \lambda 1$ ни для какого λ). Возьмем некоторое $\alpha \in \text{Sp}(a)$ и положим $I = \overline{(a - \alpha 1)A}$, так что $I \neq \{0\}$ — замкнутый (двусторонний) идеал в A . Для любого $b \in A$, элемент $(a - \alpha 1)b$ не является обратимым (см. задачу 14), так что по замечанию после леммы 1.11 имеем $\|(a - \alpha 1)b - 1\| \geq 1$. Поэтому $1 \notin I$. Получили противоречие с простотой A . $\square$

Определение 1.21. Мультипликативным функционалом на A называется нетривиальный гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$. Их множество обозначается через M_A .

Задача 16. Доказать, что $\varphi(1) = 1$. Можно воспользоваться простым наблюдением общего характера: образ идемпотента ($p^2 = p$) при гомоморфизме — всегда идемпотент.

Лемма 1.22. *Мультипликативный функционал на коммутативной банаховой алгебре A с единицей имеет норму 1. отображение, сопоставляющее каждому мультипликативному функционалу его ядро, является биекцией на множество максимальных идеалов A , то есть таких собственных идеалов, которые не содержатся ни в каком другом идеале, кроме всей алгебры A*

Доказательство. Поскольку, по задаче 16, то $\varphi(1) = 1$, $\|\varphi\| \geq 1$. Пусть $\|\varphi\| > 1$, так что найдется такой элемент $a \in A$, что $\|a\| < 1$ и $\varphi(a) = 1$. Тогда ряд $b = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ сходится и $a + ab = b$. Значит, $\varphi(b) = \varphi(a)(1 + \varphi(b)) = 1 + \varphi(b)$ — противоречие. Получаем, что $\|\varphi\| = 1$.

Поскольку $\text{Ker } \varphi$ имеет коразмерность 1, то это — максимальный идеал.

Любой функционал φ полностью определяется своим ядром и условием $\varphi(1) = 1$ (см. задачу 17 ниже), так что указанное соответствие является биекцией на образ.

Покажем, что оно является эпиморфизмом. Если $M \subset A$ является максимальным идеалом, то $\text{dist}(M, 1) = 1$, поскольку единичный открытый шар с центром в 1 состоит из обратимых элементов (замечание 1.12), а M не может содержать обратимых элементов (если $a \in M$ обратим, то $1 \in M$, а значит, $M = A$). Тогда замкнутый идеал $\overline{M}$ (замыкание M) тоже не содержит 1, так что в силу максимальной $\overline{M} = M$. Рассмотрим фактор-алгебру A/M , являющуюся простой (так как иначе M не был бы максимальным) коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Поэтому, по лемме 1.20, $A/M \cong \mathbb{C}$. Соответствующее отображение факторизации является ненулевым гомоморфизмом, то есть мультипликативным функционалом (с ядром M). $\square$

Задача 17. Доказать, что любой функционал φ полностью определяется своим ядром и условием $\varphi(1) = 1$ (профакторизовать по ядру и рассмотреть индуцированный функционал на $\mathbb{C}$).

Поскольку мультипликативные функционалы ограничены по норме единицей, то M_A является подмножеством единичного шара в сопряженном банаховом пространстве A' (пространстве всех ограниченных линейных функционалов на A). Пространство A' может быть снабжено $*$ -слабой топологией, задаваемой предбазой окрестностей вида $U_{\varphi_0, \varepsilon, a} = \{\varphi \in A' : |(\varphi - \varphi_0)(a)| < \varepsilon\}$, $\varphi_0 \in A'$, $a \in A$, $\varepsilon > 0$. В терминах направленностей, направленность φ_α сходится к φ , если $\varphi_\alpha(a)$ сходится к $\varphi(a)$ для каждого $a \in A$. Единичный шар пространства A' является компактным и хаусдорфовым относительно $*$ -слабой топологии (теорема Банаха-Алаоглу, см. [9, теорема 5, стр. 325]).

Задача 18. Проверить, что M_A является $*$ -слабо замкнутым.

Поэтому M_A тоже $*$ -слабо компактно.

Задача 19. Следующий пример описывает типичную ситуацию, как станет ясно чуть дальше. Пусть $A = C[0, 1]$, так что мультипликативные функционалы соответствуют точкам $[0, 1]$. Именно, $\varphi(g) = g(t)$. Покажите, что для “обычной” нормы сопряженного пространства для любых двух точек $t \neq s$, расстояние между φ_t и φ_s равно 1. То есть множество мультипликативных функционалов дискретно, некомпактно, никаких предельных точек нет, в отличие от ситуации со $*$ -слабой топологией.

Если же A не имеет единицы, рассмотрим банахову алгебру $A^+ = A \oplus \mathbb{C}$ (с первоначальной нормой (1.2), а не C^* -нормой из леммы 1.8). В ней A само является максимальным идеалом, отвечающим мультипликативному функционалу $\varphi_0((a, \lambda)) = \lambda$. Любой другой максимальный идеал I алгебры A^+ должен иметь собственное пересечение с A . Тогда $I \cap A$ — идеал коразмерности 1, поскольку I имел коразмерность 1 в A^+ . Таким образом, $I \cap A$ — максимальный идеал в A . Поскольку его коразмерность 1, то определено факторотображение — ненулевой гомоморфизм в $\mathbb{C}$. Обратно, если $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ — (ненулевой) мультипликативный функционал на A , то формула $\tilde{\varphi}((a, \lambda)) = \varphi(a) + \lambda$ задает единственное продолжение φ до мультипликативного функционала на A^+ (задача 21). Получаем биективное соответствие между M_A и $M_{A^+} \setminus \{\varphi_0\}$.

Задача 20. Доказать, что M_A — локально-компактное хаусдорфово пространство, а M_{A^+} — его одноточечная компактификация.

Задача 21. Проверить, что если $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ — (ненулевой) мультипликативный функционал на A , то формула $\tilde{\varphi}((a, \lambda)) = \varphi(a) + \lambda$ задает единственное продолжение φ до мультипликативного функционала на A^+ .

1.5 Преобразование Гельфанда

Определение 1.23. Для коммутативной банаховой алгебры A определим *преобразование Гельфанда* $\Gamma : A \rightarrow C_0(M_A)$ соотношением $\Gamma(a) = \hat{a}$, где $\hat{a}(\varphi) := \varphi(a)$ (необходимые условия будут проверены в следующей лемме).

Лемма 1.24. Преобразование Гельфанда является (нестрого) сжимающим гомоморфизмом алгебр и образ A разделяет точки M_A , то есть для любых двух точек M_A найдется функция из образа, принимающая в этих точках разные значения.

Доказательство. Функции $\hat{a}$ непрерывны по определению $*$ -слабой топологии. Отображение является сжимающим, поскольку

$$\|\Gamma(a)\| = \sup_{\varphi \in M_A} |\varphi(a)| \leq \sup_{\varphi \in M_A} \|\varphi\| \cdot \|a\| = \sup_{\varphi \in M_A} \|a\| = \|a\|.$$

Разделение точек очевидно, поскольку два (мультипликативных) функционала различны тогда и только тогда, когда различны их значения на каком-то элементе a . Если у A нет единицы, то заметим, что $\hat{a}(\tilde{0}) = 0(a) = 0$, где $M_{A^+} = M_A \cup \tilde{0}$. Поэтому $\hat{a} \in C_0(M_A)$. $\square$

Задача 22. Если у алгебры есть единица, то $\Gamma(1) = 1$.

Следствие 1.25. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Тогда $a \in A$ обратим тогда и только тогда, когда $\hat{a}$ обратим, и тогда и только тогда, когда $\hat{a}(\varphi) \neq 0$ для любого $\varphi \in M_A$. Поэтому $\text{Sp}(a) = \text{Sp}(\hat{a}) = \{\varphi(a) : \varphi \in M_A\}$ и $\|\hat{a}\| = r(a)$.

Доказательство. Если a обратим, то $\hat{a}$ обратим по задаче 22. Если же a не является обратимым, то рассмотрим идеал $I = \overline{aA}$. Как обсуждалось выше (см. доказательство леммы 1.20), этот идеал не может содержать 1, поэтому является собственным. Пусть I_M — максимальный идеал, содержащий I (см. задачу 23 ниже), а φ — соответствующий I_M мультипликативный функционал. Тогда $\varphi(a) = 0$ и $\hat{a}$ не является обратимым в $C(M_A)$.

Остальные утверждения сразу получаются из доказанного. $\square$

Задача 23. Любой идеал I коммутативной банаховой алгебры с единицей содержится в некотором максимальном идеале. Указание: рассмотреть объединение J всех собственных идеалов I_α , содержащих I , частично упорядоченное по включению. Для каждой цепи (вполне упорядоченной подсистемы) I_{α_τ} воспользовавшись, как и выше, тем, что 1 не принадлежит каждому I_{α_τ} , убедиться, что она не принадлежит $\bigcup_\tau I_{\alpha_\tau}$, так что это — собственный идеал. Затем применить лемму Цорна.

Теорема 1.26. Пусть A — коммутативная C^* -алгебра. Тогда преобразование Гельфанда является изометрическим $*$ -изоморфизмом A на $C_0(M_A)$.

Доказательство. Докажем теорему для алгебры с единицей. Необходимая адаптация для случая без единицы оставляется читателю в качестве задачи 24.

Пусть $\varphi \in M_A$. Рассмотрим сначала самосопряженный элемент $a^* = a \in A$. Положим $u_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!}$, $t \in \mathbb{R}$. Легко проверить, рассматривая частичную сумму и переходя к пределу, что $u_t^* = u_t^{-1}$, так что $u_t \in A$ — унитарный. Тогда

$$1 \geq |\varphi(u_t)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\varphi(a))^n}{n!} \right| = |e^{it\varphi(a)}| = e^{-t\operatorname{Im}\varphi(a)}.$$

В силу произвольности $t \in \mathbb{R}$ в этой оценке, заключаем, что $\operatorname{Im}\varphi(a) = 0$, то есть $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Произвольный элемент $c \in A$ запишем в виде $c = a + ib$, где $a = (a + a^*)/2$ и $b = (a - a^*)/2i$ являются самосопряженными. По доказанному, $\varphi(a), \varphi(b) \in \mathbb{R}$, а значит, $\varphi(c^*) = \varphi(a) - i\varphi(b) = \overline{\varphi(c)}$, так что преобразование Гельфанда сохраняет инволюцию и, таким образом, является $*$ -гомоморфизмом.

Для самосопряженного элемента ($a = a^*$) имеем $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$, поэтому

$$\|\hat{a}\| = r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a\|^{2^n})^{1/2^n} = \|a\|.$$

Для элемента $b \in A$ общего вида имеем $\|b\|^2 = \|b^*b\| = \|\widehat{b^*b}\| = \|\hat{b}^*\hat{b}\| = \|\hat{b}\|^2$, так что преобразование Гельфанда является изометрией (на образ).

Поэтому $\Gamma(A)$ является замкнутой по норме инволютивной подалгеброй с единицей в $C(M_A)$, разделяющей точки. По теореме Стоуна-Вейерштрасса¹, $\Gamma(A) = C(M_A)$. $\square$

Задача 24. Доказать теорему для алгебры без единицы.

¹Теорема не всегда рассказывается в стандартном курсе функционального анализа, поэтому мы приводим ее доказательство в параграфе 1.6.

Таким образом, в частности, существует обратное отображение для преобразования Гельфанда, которое так же является изометрическим $*$ -изоморфизмом.

Пусть $a \in A$ — нормальный элемент. Обозначим через $C^*(1, a)$ (соотв., $C^*(a)$) C^* -алгебру, порожденную 1 и a (соотв., только a). В силу нормальности, эти алгебры коммутативны, причем первое определение подразумевает, что A имеет единицу.

Уточним, что C^* -алгеброй, порожденной множеством, мы называем минимальную C^* -подалгебру A , содержащую множество, то есть пересечение всех C^* -подалгебр A , содержащих это множество.

Задача 25. Проверьте, что C^* -алгебра, порожденная множеством, — действительно C^* -алгебра.

Задача 26. Если a — обратимый элемент, то алгебра $C^*(a)$ имеет единицу. В этом случае $C^*(a) = C^*(1, a)$.

Следствие 1.27. Если $a^* = a$, то $\text{Sp}(a) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Как мы установили, $\text{Sp}(a) = \text{Sp}(\hat{a})$, причем по доказанному $\hat{a}^* = \hat{a}$. Но самосопряженная функция — это функция, принимающая вещественные значения, в то время как спектр функции — это множество ее значений. $\square$

Следствие 1.28. Алгебра $C^*(1, a)$ изометрически $*$ -изоморфна алгебре $C(\text{Sp}(a))$ при отображении, переводящем a в функцию $z(t) = t$, $z : \text{Sp}(a) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Алгебра $C^*(a)$ отображается на $C_0(\text{Sp}(a) \setminus \{0\})$.

Доказательство. Для коммутативной C^* -алгебры $C^*(1, a)$ найдем $X = M_{C^*(1, a)}$. Любой мультипликативный функционал $\varphi \in X$ определяется его значением $\varphi(a) = \lambda$ на a . При этом в силу мультипликативности $\varphi(p(a, a^*)) = p(\lambda, \bar{\lambda})$ для любого многочлена p . Таким образом, X отождествляется с множеством возможных значений λ , которые принимает $\varphi(a) = \hat{a}(\varphi)$ при $\varphi \in X$. По следствию 1.25, имеем $\hat{a}(X) = \text{Sp}(a)$. Получаем отождествление $\text{Sp}(a) \cong X$ при помощи соответствия $\text{Sp}(a) \ni \lambda \mapsto \varphi_\lambda \in X$, где φ_λ определяется условием $\varphi_\lambda(a) = \lambda$.

Это отождествление переносится на функции: каждая непрерывная функция на X отождествляется с непрерывной функцией на $\text{Sp}(a)$, именно, функции $\hat{b} = \hat{b}(\varphi)$ сопоставляется функция аргумента $\lambda \in \text{Sp}(a)$, заданная как $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(b)$. Например, если мы возьмем многочлен $p(a, a^*) = b$, то соответствующей функцией будет $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(p(a, a^*)) = p(\lambda, \bar{\lambda})$. В частности, функция $\hat{a}$ переходит в $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(a) = \lambda$, так что преобразование Гельфанда отождествляет $\hat{a}$ с тождественным отображением X . По теореме 1.26, это отображение — изометрический $*$ -изоморфизм.

Если a обратим, то по задаче 26, $C^*(a)$ изометрически $*$ -изоморфно $C(\text{Sp}(a))$. Если же a не является обратимым, то $C^*(a)$ не имеет единицы (см. задачу 27). Она соответствует при построенном отображении для $C^*(1, a) \cong C^*(a)^+$ идеалу $C(\text{Sp}'(a))$, состоящему из функций, обнуляющихся в 0. $\square$

Задача 27. Доказать, что если a не является обратимым, то $C^*(a)$ не имеет единицы. Указание: если 1 имеется, то она должна приближаться достаточно хорошо многочленом от a и a^* , который не может быть обратимым элементом.

Следствие 1.29 (непрерывное функциональное исчисление). Пусть a — нормальный элемент C^* -алгебры A с единицей, а f — непрерывная функция на $\text{Sp}(a)$. Тогда элемент $f(a) \in A$ определяется как прообраз f при преобразовании Гельфанда: $\Gamma = \Gamma_a : C^*(1, a) \rightarrow C(\text{Sp}(a))$, $f(a) := (\Gamma_a)^{-1}(f)$. Если $0 \in \text{Sp}(a)$ и $f(0) = 0$, то $f(a) \in C^*(a)$. Кроме того, $f(\text{Sp}(a)) = \text{Sp}(f(a))$ и если g — непрерывная функция на $f(\text{Sp}(a))$, то $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Доказательство. Всё уже было доказано, кроме последнего утверждения. Рассмотрим сначала многочлен $p(\lambda, \bar{\lambda})$ в качестве $f = f(\lambda)$. Тогда $\Gamma(p(a, a^*))$ — функция $\lambda \mapsto p(\lambda, \bar{\lambda})$, так что $\text{Sp}(p(a, a^*))$ совпадает с множеством значений этой функции, $\{\mu : \mu = p(\lambda, \bar{\lambda}), \lambda \in \text{Sp}(a)\}$. Приближая f многочленами, получаем $f(\text{Sp}(a)) = \text{Sp}(f(a))$ (задача 28).

Аналогично, рассмотрим многочлен $q(\lambda, \bar{\lambda})$ в качестве g . Легко увидеть, что

$$q(f(a)) = \lim_{\alpha} (q(p_{\alpha}(a))) = \lim_{\alpha} (q \circ p_{\alpha})(a) = (q \circ f)(a).$$

Теперь приближаем g многочленами и пользуемся изометричностью обратного преобразования Гельфанда. $\square$

Задача 28. Доказать, что $f(\text{Sp}(a)) = \text{Sp}(f(a))$ в доказательстве выше, приближая f многочленами, и правильно сформулировав, что значит, что образ непрерывен при равномерном приближении, и пользуясь изометричностью преобразования Гельфанда.

Следствие 1.30. Если a — нормальный элемент, то $\|a\| = r(a)$.

Доказательство. $\|a\| = \|\hat{a}\| = \sup_{\varphi \in M_A} |\hat{a}(\varphi)| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(a)} |\lambda| = r(a)$. $\square$

1.6 Дополнение: теорема Стоуна-Вейерштрасса

Рассмотрим сначала алгебру $C_{\mathbb{R}}(X)$ над $\mathbb{R}$, образованную всеми непрерывными вещественнозначными функциями на компактном хаусдорфовом пространстве X .

Теорема 1.31. Пусть $A \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, является такой замкнутой подалгеброй², что A разделяет точки X и содержит $1 \in C_{\mathbb{R}}(X)$ (а значит, и все постоянные функции). Тогда $A = C_{\mathbb{R}}(X)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что условие разделения точек можно усилить, а именно: для любых x и y из X и любых u и v из $\mathbb{R}$ существует такая функция $g \in A$, что $g(x) = u$ и $g(y) = v$. Действительно, поскольку имеется $f \in A$ со свойством $u' = f(x) \neq f(y) = v'$, то g можно взять равной

$$g = \frac{u - v}{u' - v'} \cdot f + \frac{u'v - v'u}{u' - v'} \cdot 1.$$

²это условие можно ослабить

Для $f, g \in A$ определим непрерывные функции $f \vee g$, $f \wedge g$, $\gamma(g)$ как

$$(f \vee g)(s) = \max\{f(s), g(s)\}, \quad (f \wedge g)(s) = \min\{f(s), g(s)\}, \quad \gamma(g)(s) = |g(s)|.$$

По теореме Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами, найдется такая последовательность многочленов p_n , что

$$||\lambda| - p_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{при } -n \leq \lambda \leq n.$$

Тогда

$$||g(s)| - p_n(g)(s)| = ||g(s)| - p_n(g(s))| \leq \frac{1}{n} \quad \text{при } -n \leq g(s) \leq n.$$

Значит, $\gamma(g) \in A$. Поэтому и $f \vee g \in A$, $f \wedge g \in A$, поскольку

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{\gamma(f-g)}{2}, \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{\gamma(f-g)}{2}.$$

Рассмотрим теперь произвольную $F \in C_{\mathbb{R}}(X)$ и по замечанию из начала доказательства, найдем для произвольных $x, y \in X$ такую $f_{x,y} \in A$, что $f_{x,y}(x) = F(x)$ и $f_{x,y}(y) = F(y)$. Зафиксировав временно y , найдем для каждого $x \in X$ такую его окрестность U_x , что $f_{x,y}(u) > F(u) - \varepsilon$ при $u \in U_x$. Выберем конечное подпокрытие $U_{x_1}, \dots, U_{x_p}$ и определим $f_y = f_{x_1,y} \vee \dots \vee f_{x_p,y}$. Тогда $f_y(u) > F(u) - \varepsilon$ при любом $u \in X$. Поскольку $f_{x_i,y}(y) = F(y)$ для любого $i = 1, \dots, p$, то $f_y(y) = F(y)$. Значит, найдется такая окрестность V_y точки y , что $f_y(u) < F(u) + \varepsilon$ при $u \in V_y$. Выберем конечное подпокрытие $V_{y_1}, \dots, V_{y_q}$ и определим $f := f_{y_1} \wedge \dots \wedge f_{y_q}$. Так как каждое $f_{y_i}(u) > F(u) - \varepsilon$ при любом $u \in X$, то и $f(u) > F(u) - \varepsilon$ при любом $u \in X$. С другой стороны, для любого $u \in X$ найдется $V_{y_i} \ni u$, так что $f(u) < f_{y_i}(u) < F(u) + \varepsilon$. Объединяя неравенства, получаем, что $|f(u) - F(u)| < \varepsilon$ при любом $u \in X$. В силу произвольности ε получаем требуемый результат. $\square$

Теорема 1.32. Пусть $A \subseteq C(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, является такой замкнутой инволютивной подалгеброй, что A разделяет точки X и содержит $1 \in C(X)$ (а значит, и все постоянные функции). Тогда $A = C(X)$.

Доказательство. Инволюция имеет вид $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Пусть A_R состоит из вещественнозначных функций, принадлежащих A . Заметим, что это — подалгебра алгебры $C_{\mathbb{R}}(X)$, содержащая единицу. Поскольку A_R совпадает с ядром непрерывного $\mathbb{R}$ -линейного отображения $f \mapsto f - f^*$, то она замкнута в A , а значит, и в $C(X)$. Поэтому $A_R = A \cap C_{\mathbb{R}}(X)$ замкнута в $C_{\mathbb{R}}(X)$. Наконец, A_R разделяет точки X . Действительно, если $f(x) \neq f(y)$, где $f \in A$, то $f = f_1 + if_2$ при $f_1 = (f + f^*)/2 \in A_R$, $f_2 = (f - f^*)/2i \in A_R$, так что хотя бы одна из f_1, f_2 разделяет x и y .

Поэтому по предыдущей теореме, $C_{\mathbb{R}}(X) = A_R \subset A$. Снова пользуясь представлением $f = f_1 + if_2$, но уже для всей $C(X)$, видим, что $\mathbb{C}$ -линейные комбинации элементов $C_{\mathbb{R}}(X)$ дают $C(X)$ и, в то же время, дают A в силу доказанного. Значит, $A = C(X)$. $\square$

1.7 Положительные элементы

Определение 1.33. Самосопряженный элемент a в C^* -алгебре A с единицей называется *положительным*, если $\text{Sp}(a) \subset [0, \infty)$. Если у A нет единицы, то a называется *положительным*, если он положителен в A^+ .

Положительность записывается как $a \geq 0$. Для двух самосопряженных элементов $a, b \in A$ мы говорим, что $a \geq b$, если $a - b \geq 0$.

Задача 29. Показать, что если $a \geq 0$ и $0 \geq a$, то $a = 0$; а также, что $-\|a\|1 \leq a \leq \|a\|1$ для всякого самосопряженного a .

Теперь рассмотрим другие применения непрерывного функционального исчисления к положительности.

Следствие 1.34. Пусть $a \in A$ — положительный элемент. Тогда существует единственный положительный квадратный корень b из a , то есть такой $b \geq 0$, что $b^2 = a$.

Доказательство. Функция $f(z) = \sqrt{z}$ определена и непрерывна на $[0, \infty)$, поэтому $b = f(a)$ определен. Он самосопряжен и даже положителен (поскольку f отображает $[0, \infty)$ в себя) и $b^2 = f(a)^2 = a$ (по следствию 1.29). Если c — другой положительный квадратный корень из a , то $c = f(c^2) = f(a) = b$. $\square$

Следствие 1.35. Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеются такие положительные элементы $a_+, a_- \in A$, что $a = a_+ - a_-$ и $a_+ a_- = 0$.

Доказательство. Определим непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, положив $f(x) = x$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Обозначим $g(x) = f(-x)$. Эти функции удовлетворяют $f(x) - g(x) = x$ и $f(x)g(x) = 0$. Остается положить $a_+ = f(a)$, $a_- = g(a)$. $\square$

Следствие 1.36. Для самосопряженного элемента $a \in A$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $a \geq 0$;
- (ii) $a = b^2$ для некоторого самосопряженного b ;
- (iii) $\|\mu 1 - a\| \leq \mu$ для всякого $\mu \geq \|a\|$;
- (iv) $\|\mu 1 - a\| \leq \mu$ для некоторого $\mu \geq \|a\|$.

Доказательство. По следствию 1.34, из (i) следует (ii). Кроме того, из (iii) следует (iv) по очевидным соображениям.

Покажем, что из (ii) следует (iii). По предположению, $a = f(b)$, где $f(x) = x^2$. При этом норма f на $\text{Sp}(b)$ равна $\|a\|$, так что $0 \leq \mu - x^2 \leq \mu$ при любом $\mu \geq \|a\|$ и $x \in \text{Sp}(b)$. Поскольку $\mu 1 - a = (\mu - f)(b)$, то $\|(\mu - f)(b)\|$ равняется норме $\mu - f$ на $\text{Sp}(b)$, которая не превосходит μ .

Покажем наконец, что из (iv) следует (i). Поскольку для некоторого $\mu \geq \|a\|$ выполнено $\|\mu - x\| = \sup_{x \in \text{Sp}(a)} |\mu - x| \leq \mu$, то ни одно $x \in \text{Sp}(a)$ не может быть отрицательным. $\square$

Следствие 1.37. Если a и b положительны, то и $a + b$ положителен.

Доказательство. Выберем некоторые $\mu \geq \|a\|$, $\nu \geq \|b\|$. Тогда $\|a + b\| \leq \mu + \nu$ и по пункту (iii) следствия 1.36

$$\|(\mu + \nu)1 - (a + b)\| = \|(\mu 1 - a) + (\nu 1 - b)\| \leq \|\mu 1 - a\| + \|\nu 1 - b\| \leq \mu + \nu.$$

Поэтому по пункту (iv) следствия 1.36, $a + b$ положителен. $\square$

Задача 30. Если $0 \leq a \leq b$, то $\|a\| \leq \|b\|$. *Указание:* Как мы знаем, $b \leq \|b\| \cdot 1_A$. Значит, $a \leq \|b\| \cdot 1_A$, то есть, $\text{Sp}(\|b\| \cdot 1_A - a) \subset [0, +\infty)$. Из $\text{Sp}(\mu 1_A - a) = \mu - \text{Sp}(a)$ выведите, что $\|a\| = \max\{\lambda \in \text{Sp}(a)\}$ равно $\min\{\mu: \text{Sp}(\mu \cdot 1_A - a) \subset [0, +\infty)\}$. Отсюда следует утверждение.

Переходя к важному предложению 1.39, заметим, что оно практически очевидно для операторов в гильбертовом пространстве, но весьма нетривиально для элементов C^* -алгебры. Для его доказательства нам понадобится следующий результат о спектрах произведений в разном порядке.

Лемма 1.38. Если $a, b \in A$, то $\text{Sp}(ab) \cup \{0\} = \text{Sp}(ba) \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $0 \neq \lambda \notin \text{Sp}(ab)$. Это значит, что $(ab - \lambda 1) = -\lambda(1 - \lambda^{-1}ab)$ обратим, так что существует такой элемент $u \in A$, что $(1 - \lambda^{-1}ab)u = 1$. Положим $v = 1 + \lambda^{-1}bua$. Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \lambda^{-1}ba)v &= (1 - \lambda^{-1}ba)(1 + \lambda^{-1}bua) = 1 - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}bua - \lambda^{-2}babua = \\ &= 1 - \lambda^{-1}ba + \lambda^{-1}b(1 - \lambda^{-1}ab)ua = 1 - \lambda^{-1}ba - \lambda^{-1}ba = 1, \end{aligned}$$

так что $\lambda \notin \text{Sp}(ba)$. $\square$

Предложение 1.39. Элемент a^*a положителен при всяком $a \in A$.

Доказательство. Поскольку a^*a самосопряжен, мы можем расписать $a^*a = b_+ - b_-$ по следствию 1.35. Положим $c := \sqrt{b_-}$, $t := ac$. Заметим, что $f(0) = 0$ для $f(x) = \sqrt{x}$, так что c приближается многочленами от b_- без свободного члена, а значит, $cb_+ = 0$. Имеем:

$$-t^*t = -c(b_+ - b_-)c = b_-^2. \quad (1.6)$$

Следовательно, $-t^*t$ положителен.

Запишем t в виде $t = x + iy$, где x и y самосопряженные элементы A (то есть $x = (t + t^*)/2$, $y = (t - t^*)/2i$). Тогда $t^*t + tt^* = 2(x^2 + y^2)$ является положительным по следствию 1.37. По тому же следствию, видим, что элемент

$$tt^* = (t^*t + tt^*) - t^*t = (t^*t + tt^*) + b_-^2$$

также положителен, то есть $\text{Sp}(tt^*) \subset [0, \infty)$. По лемме 1.38, $\text{Sp}(t^*t) \subset [0, \infty)$, так что t^*t положителен. Но он и отрицателен по (1.6), поэтому $t^*t = 0$ по задаче 29. Значит, $b_- = 0$, поскольку положительный квадратный корень единствен. $\square$

Следствие 1.40. Если $b \leq c$, то $a^*ba \leq a^*ca$ для любого $a \in A$.

Доказательство. Поскольку $c - b$ положителен, то $c - b = d^2$ для некоторого само-сопряженного d ; поэтому $a^*(c - b)a = a^*d^2a = (da)^*(da) \geq 0$. $\square$

Следствие 1.41. Если a и b обратимы и $0 \leq a \leq b$, то $b^{-1} \leq a^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай $b = 1$. Тогда $\text{Sp}(a) \subseteq [0, 1]$. По теореме об отображении спектра, мы видим, что $\text{Sp}(a^{-1}) \subseteq [1, \infty)$, так что $a^{-1} \geq 1$. Перейдем к общему случаю. Поскольку, по следствию 1.40, $b^{-1/2}ab^{-1/2} \leq 1$, то $b^{1/2}a^{-1}b^{1/2} \geq 1$. Умножая это неравенство на $b^{-1/2}$ с обеих сторон и снова применяя следствие 1.40, получаем $a^{-1} \geq b^{-1}$. $\square$

Задача 31. Произведение двух положительных элементов не обязано быть положительным.

1.8 Аппроксимативные единицы

Пусть Λ — направленное множество. Семейство $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ элементов C^* -алгебры A называется *аппроксимативной единицей*, если $\lim_\Lambda \|xu_\lambda - x\| = 0$ для $x \in A$ (и, следовательно, $\lim_\Lambda \|u_\lambda x - x\| = 0$). Если A имеет единицу, то можно взять $u_\lambda = 1$ для любого λ , так что это понятие представляет интерес только для алгебр без единицы. В определение аппроксимативной единицы также включают условия $0 \leq u_\lambda \leq 1$ и $u_\lambda \leq u_\mu$ при всяких $\lambda \leq \mu$ из Λ .

Теорема 1.42. У любой C^* -алгебры имеется аппроксимативная единица.

Доказательство. Положим $\Lambda = \{a \in A \mid a \geq 0; \|a\| < 1\}$. Порядок на Λ задается $\leq$. Покажем, что множество элементов Λ , индексированное тавтологическим образом (a имеет индекс a), является аппроксимативной единицей.

Прежде всего, надо проверить, что Λ является направленным множеством, то есть, что для любых двух элементов $a, b \in \Lambda$ найдется такой $c \in \Lambda$, что $a \leq c$ и $b \leq c$. Пусть $f(t) := \frac{t}{1-t}$ и $g(t) := \frac{t}{1+t}$. При этом функция f определена на $[0, 1)$, функция g — на $[0, \infty)$ и $g(f(t)) = t$. Положим $x := f(a)$, $y := f(a) + f(b)$, $c := g(y)$. Поскольку $0 \leq g(t) < 1$, то $c \in \Lambda$. Из неравенства $x \leq y$ следует $1 + x \leq 1 + y$, так что $(1 + x)^{-1} \geq (1 + y)^{-1}$ и

$$a = 1 - (1 + x)^{-1} \leq 1 - (1 + y)^{-1} = c.$$

Аналогично получается $b \leq c$, и направленность множества Λ проверена.

Теперь проверим, что $\lim_\Lambda \|x - ax\| = 0$ для всякого $x \in A$. Поскольку по следствию 1.35 каждый элемент разлагается в линейную комбинацию четырех положительных

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i \frac{x - x^*}{2i} = \left(\frac{x + x^*}{2} \right)_+ - \left(\frac{x + x^*}{2} \right)_- + i \left(\frac{x - x^*}{2i} \right)_+ - i \left(\frac{x - x^*}{2i} \right)_-, \quad (1.7)$$

то достаточно проверить утверждение для $x \geq 0$. Поскольку для $a \in \Lambda$ имеем $0 \leq 1 - a \leq 1$, то по следствию 1.40, $(1 - a)^{1/2}(1 - a)(1 - a)^{1/2} \leq (1 - a)^{1/2}(1 - a)^{1/2} = 1 - a$. Поэтому

$$\|(1 - a)x\|^2 = \|x^*(1 - a)^2x\| \leq \|x^*(1 - a)x\|,$$

и достаточно проверить, что $\lim_{\Lambda} \|x(1 - a)x\| = 0$ для любого $x \geq 0$ из A , причем без ограничения общности можно считать, что $\|x\| = 1$.

Аналогично предыдущему рассуждению, если $a, b \in \Lambda$ и $a \leq b$ то $\|x^*(1 - b)x\| \leq \|x^*(1 - a)x\|$, так что, при $x \geq 0$,

$$\sup_{b \in \Lambda, b \geq a} \|x(1 - b)x\| = \|x(1 - a)x\|.$$

Поэтому нам нужно показать, что для любого положительного $x \in A$ нормы один и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $a \in \Lambda$, что $\|x^*(1 - a)x\| < \varepsilon$. Положим $a_n := g(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. начало доказательства). Тогда $\|x(1 - a_n)x\| = \|h(x)\|$, где $h(t) := t^2(1 - g(nt)) = \frac{t^2}{1+nt}$. Для любого $t \in [0, 1]$ выполняется $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{n}$, так что $\|h(x)\| \leq \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\sup_{b \in \Lambda, b \geq a_n} \|x(1 - b)x\| = \|x(1 - a_n)x\| \leq \frac{1}{n}$$

для любого n , поэтому $\lim_{b \in \Lambda} \|x(1 - b)x\| = 0$. □

Определение 1.43. Аппроксимативная единица называется *счетной*, если множество Λ счетно.

Следствие 1.44. У сепарабельной C^* -алгебры имеется счетная аппроксимативная единица.

Доказательство. Выберем плотную последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в A . Тогда найдется такой элемент $a_1 \in A$, $0 \leq a_1$, $\|a_1\| < 1$, что $\|x_1 a_1 - x_1\| \leq 1$ (см. доказательство предыдущей теоремы). Предположим по индукции, что мы уже нашли такие $a_2, \dots, a_n$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, что для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполнено $\|a_k\| < 1$ и $\|x_i a_k - x_i\| \leq \frac{1}{k}$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Теперь найдем такой элемент $a_{n+1} \geq a_n$ с нормой $\|a_{n+1}\| < 1$, что $\|x_i a_{n+1} - x_i\| \leq \frac{1}{n+1}$ при $i = 1, 2, \dots, n+1$. Поскольку последовательность (x_n) плотна в A , то по индукции получаем такую неубывающую последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ положительных элементов единичного шара, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x a_n - x\| = 0$ для каждого $x \in A$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдем такой элемент x_i , что $\|x - x_i\| < \varepsilon/3$, а для x_i — такой номер j , что $\|x_i a_k - x_i\| < \varepsilon/3$ для всех $k > j$. Тогда для этих k

$$\|x a_k - x\| = \|x_i a_k - x_i + (x - x_i) a_k + x - x_i\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \|a_k\| + \varepsilon/3 \leq \varepsilon.$$

□

Задача 32. Доказать, что обратное неверно: алгебра со счетной аппроксимативной единицей не обязана быть сепарабельной.

1.9 Идеалы, факторы и гомоморфизмы

Под *идеалом C^* -алгебры* мы всегда будем подразумевать двусторонний идеал, замкнутый по норме (для максимальных идеалов в коммутативном случае это получалось автоматически).

Лемма 1.45. *Всякий идеал I в C^* -алгебре является самосопряженным: $I = I^*$.*

Доказательство. Если $I \subset A$ — идеал, то $B := I \cap I^* \subseteq A$ является C^* -подалгеброй. При этом $B \supset I \cdot I^*$. Пусть (u_λ) — аппроксимативная единица в B , а $j \in I$. Тогда

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|j^* u_\lambda - j^*\|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda (j j^* u_\lambda - j j^*) - (j j^* u_\lambda - j j^*)\| \leq 2 \lim_{\lambda \in \Lambda} \|j j^* u_\lambda - j j^*\| = 0.$$

Поскольку $u_\lambda \in I$, то $j^* u_\lambda \in I$, так что $j^* \in I$, поскольку I замкнут. $\square$

Следующая техническая лемма часто используется.

Лемма 1.46. *Если $x^* x \leq a$ в A , то существует такой $b \in A$, что $\|b\| \leq \|a\|^{1/4}$ и $x = ba^{1/4}$.*

Доказательство. Положим $b_n := x(a + \frac{1}{n}1)^{-1/2}a^{1/4}$ (этот элемент лежит в A , даже если у A нет единицы, но нам удобно в этом случае производить вычисления в A^+). Пусть также

$$d_{nm} := \left(a + \frac{1}{n}1\right)^{-1/2} - \left(a + \frac{1}{m}1\right)^{-1/2}, \quad f_n(t) := t^{3/4} \left(t + \frac{1}{n}\right)^{-1/2}.$$

Тогда последовательность функций $\{f_n(t)\}$ сходится к $f(t) := t^{1/4}$ равномерно на $[0, \|a\|]$, поскольку в силу $u^2 + v^2 \geq 2uv$ имеем

$$\begin{aligned} \left(t^{1/4} \left(1 - \frac{t^{1/2}}{(t + 1/n)^{1/2}}\right)\right)^2 &= t^{1/2} \frac{t + 1/n + t - 2t^{1/2}(t + 1/n)^{1/2}}{t + 1/n} < \\ &< t^{1/2} \frac{t + 1/n + t - 2t}{t + 1/n} = t^{1/2} \frac{1/n}{t + 1/n} = \frac{2\sqrt{t/n}}{t + 1/n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Оценим:

$$\begin{aligned} \|b_n - b_m\|^2 &= \|x d_{nm} a^{1/4}\|^2 = \|a^{1/4} d_{nm} x^* x d_{nm} a^{1/4}\| \leq \|a^{1/4} d_{nm} a d_{nm} a^{1/4}\| = \\ &= \|d_{nm} a^{3/4}\|^2 = \|f_n(a) - f_m(a)\|^2 = \sup_{t \in [0, \|a\|]} |f_n(t) - f_m(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку f_n — последовательность Коши, то и b_n — тоже. Положим $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Тогда $ba^{1/4} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n a^{1/4} = \lim_{n \rightarrow \infty} x(a + \frac{1}{n}1)^{-1/2}a^{1/4} = x$. $\square$

Задача 33. Проверьте, что последний предел, действительно, равен x . Это делается аналогично вычислению для f_n в доказательстве, с использованием $x^* x \leq a$.

Определение 1.47. Подалгебра $B \subset A$ называется *наследственной*, если для любых положительных $b \in B$ и $a \in A$, из условия $0 \leq a \leq b$ следует, что $a \in B$.

Задача 34. Доказать, что положительный элемент произвольной C^* -подалгебры является положительным элементом всей алгебры.

Лемма 1.48. Пусть $I \subset A$ — идеал, а $j \in I$ — положительный элемент. Если $a^*a \leq j$, то $a \in I$. В частности, любой идеал — наследственная подалгебра.

Доказательство. Разложим $a = bj^{1/4}$ в соответствии с леммой 1.46. При этом $j^{1/4} \in C^*(j) \subset I$, а значит, $a \in I$. $\square$

Если $I \subset A$ — идеал, то можно определить банахову фактор-алгебру A/I с нормой $\|a+I\| := \inf_{j \in I} \|a+j\|$. Это — инволютивная алгебра: так как I — самосопряженный, то $\|(a+I)^*\| = \|a^*+I\| = \|a+I\|$. Для краткости будем обозначать $a+I$ через $\dot{a} \in A/I$.

Теорема 1.49. Инволютивная алгебра A/I является C^* -алгеброй.

Доказательство. Необходимо проверить только C^* -свойство. Пусть $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — аппроксимативная единица I (заметим, что идеалы, как правило, не имеют единицы, и уж во всяком случае, собственный идеал не содержит единицу A , даже если таковая имеется). Покажем прежде всего, что

$$\|\dot{a}\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda\|. \quad (1.8)$$

Действительно, поскольку $u_\lambda \in I$, то $\|\dot{a}\| \leq \|a - au_\lambda\|$. Для доказательства обратного неравенства выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой элемент $j \in I$, что $\|\dot{a}\| \geq \|a - j\| - \varepsilon$. Имеем

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda\| \leq \lim_{\lambda \in \Lambda} (\|a - au_\lambda - (j - ju_\lambda)\| + \|j - ju_\lambda\|) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda - (j - ju_\lambda)\|.$$

Записывая в A^+ , где имеет место равенство $a - au_\lambda - (j - ju_\lambda) = (a - j)(1 - u_\lambda)$, получаем оценку $\|(a - j)(1 - u_\lambda)\| \leq \|a - j\| < \|\dot{a}\| + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем (1.8).

Теперь, вычисляя в A^+ , находим оценку

$$\begin{aligned} \|\dot{a}^*\dot{a}\| &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a^*a(1 - u_\lambda)\| \geq \lim_{\lambda \in \Lambda} \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| = \\ &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a(1 - u_\lambda)\|^2 = \|\dot{a}\|^2. \end{aligned}$$

Обратное неравенство $\|\dot{a}^*\dot{a}\| \leq \|\dot{a}\|^2$ верно в любой инволютивной банаховой алгебре. $\square$

Определение 1.50. Пусть A и B — C^* -алгебры. Назовем $*$ -гомоморфизмом из A в B любой гомоморфизм φ , сохраняющий инволюцию: $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. Если обе алгебры имеют единицы, то φ называется *унитальным*, если $\varphi(1_A) = 1_B$.

Задача 35. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизм алгебр без единицы. Доказать, что существует единственный унитарный $*$ -гомоморфизм $\varphi^+ : A^+ \rightarrow B^+$, продолжающий φ . Указание: единственная возможность для определения φ^+ заключается в требовании унитарности: $\varphi^+(1) = 1$.

Задача 36. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — $*$ -гомоморфизм алгебр, причем A без единицы, а B — с единицей. Доказать, что существует единственный унитарный $*$ -гомоморфизм $\varphi^{(+)} : A^+ \rightarrow B$, продолжающий φ . Указание — то же, что и выше.

Теорема 1.51. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — ненулевой $*$ -гомоморфизм. Тогда $\|\varphi\| = 1$ (в частности, он непрерывен) и $\varphi(A)$ является C^* -подалгеброй B . Если φ инъективен, то он является изометрическим (на образ).

Доказательство. Если у алгебры A нет единицы, то будем рассматривать φ^+ из задачи 35 или $\varphi^{(+)}$ из задачи 36. Если у алгебры A есть единица, то можем считать, что и у B — тоже есть (если нет — то присоединим, не требуя унитарности гомоморфизма). При этом $\varphi(1_A) = p$ — самосопряженный идемпотент ($p^2 = p$), пространство $B_p := pBp$ — подалгебра B (см. задачу 37) с единицей $p = p \cdot 1_B \cdot p$, а φ , рассматриваемый как гомоморфизм в B_p , является унитарным.

Таким образом, при доказательстве можем ограничиться случаем унитарного гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ алгебр с единицей.

Чтобы различать спектр элемента в A и B , будем записывать Sp_A (соотв., Sp_B) для спектра элементов в A (соотв., в B).

Пусть $a = a^* \in A$. Тогда $\text{Sp}_B(\varphi(a)) \subset \text{Sp}_A(a)$, поскольку φ является унитарным $*$ -гомоморфизмом алгебр и $\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) \leq r(a) = \|a\|$. Для элемента $a \in A$ общего вида имеем $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2$, так что $\|\varphi\| \leq 1$, то есть φ непрерывен и не увеличивает норму.

Предположим теперь, что φ инъективен, но не изометричен. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что $\|\varphi(a)\| < \|a\|$. Значит, $\|\varphi(b)\| < \|b\|$ при $b := a^*a$. Обозначим $\|\varphi(b)\| =: r$ и $\|b\| =: s$. Пусть h — непрерывная вещественная функция, который удовлетворяет условиям $h(t) = 0$ при $t \in [0, r]$ и $h(s) = 1$. Тогда $\|\varphi(h(b))\| = \|h(\varphi(b))\| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}_B(\varphi(b))} |h(\lambda)| = 0$, в то время как $\|h(b)\| = \sup_{\lambda \in \text{Sp}_A(b)} |h(\lambda)| \geq 1$. Противоречие с инъективностью. (Условие коммутирования очевидно для многочленов, h_n , равномерно приближающих h , а в пределе получаем для h .)

В случае общего (не обязательно инъективного) $*$ -гомоморфизма, заметим, что $I = \text{Ker } \varphi$ замкнут, поскольку φ непрерывен, так что I — идеал в A . Поэтому φ индуцирует инъективный $*$ -гомоморфизм $\dot{\varphi} : A/I \rightarrow B$ по правилу $\dot{\varphi}(\dot{a}) = \varphi(a)$. Тогда, по доказанному, $\dot{\varphi}$ является изометрическим, а $\varphi(A) = \dot{\varphi}(A/I)$ замкнута в B , так что является C^* -подалгеброй. Поскольку φ — ненулевой, то имеется $a \in A$ с $\varphi(a) \neq 0$. В силу изометричности $\dot{\varphi}$, имеем равенство $\|\dot{a}\| = \|\dot{\varphi}(\dot{a})\| = \|\varphi(a)\|$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $c \in A$, что $\dot{c} = \dot{a}$ и $\|c\| < \|\dot{a}\| + \varepsilon$. Значит, $\|\varphi(c)\| > \|c\| - \varepsilon$. В силу произвольности ε , получаем $\|\varphi\| \geq 1$, так что $\|\varphi\| = 1$. $\square$

Задача 37. Доказать, что алгебра B_p замкнута, получив предварительно равенство $pBp = \text{Ker}(L_{1-p}) \cap \text{Ker}(R_{1-p})$, где L_{1-p} и R_{1-p} — линейные операторы левого и правого умножения на $1 - p$ в B , заданные $L_{1-p} : b \mapsto (1 - p)b$ и $R_{1-p} : b \mapsto b(1 - p)$.

Задача 38. Развить результат предыдущей задачи, проверив разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $B = pBp \oplus pB(1-p) \oplus (1-p)Bp \oplus (1-p)B(1-p)$, причем, если записывать четверку (a, b, c, d) , представляющую элемент данной прямой суммы в виде матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то умножение в B перейдет при изоморфизме в умножение матриц по стандартному правилу.

Задача 39. Вывести из теоремы 1.51 утверждение $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любого нормального a и непрерывной на нужном множестве f (а не только для многочлена).

Задача 40. Продумать доказательство теоремы 1.51 через редукцию к отображению коммутативных подалгебр.

Следствие 1.52. Пусть $I \subset A$ — идеал, а $B \subset A$ — C^* -подалгебра. Тогда $I + B$ совпадает с C^* -подалгеброй $C^*(I, B)$, порожденной I и B .

Доказательство. Очевидно, что $I + B \subset C^*(I, B)$ и является инволютивной подалгеброй. Пусть $q : A \rightarrow A/I$ — *-гомоморфизм факторизации. Мы знаем из предыдущей теоремы, что $q(B)$ замкнут в A/I , так что $I + B = q^{-1}(q(B))$ замкнуто в A . Значит, $I + B$ является C^* -алгеброй, содержащейся в $C^*(I, B)$. $\square$

До сих пор мы проявляли большую осторожность при рассмотрении спектра элемента в C^* -алгебре и ее C^* -подалгебре. Следующая лемма показывает, что это не так важно.

Лемма 1.53. Пусть $B \subset A$ — C^* -подалгебра с единицей C^* -алгебры с единицей, причем $1_A = 1_B$, а $a \in B$. Тогда $\text{Sp}_B(a) = \text{Sp}_A(a)$.

Доказательство. Очевидно, что если элемент имеет обратный в B , то и в A тоже, откуда $\text{Sp}_A(a) \subset \text{Sp}_B(a)$. Обратное включение следует из утверждения, что если a обратим в A , то его обратный принадлежит B . Чтобы доказать это, рассмотрим сначала случай $a = a^*$. Тогда C^* -алгебра $C = C^*(a, a^{-1})$, порожденная a и a^{-1} , является коммутативной унитарной C^* -подалгеброй A , а значит, она изоморфна некоторой алгебре функций $C(X)$. Пусть $\hat{a}$ обозначает образ a при этом изоморфизме. Тогда $0 \notin \text{Sp}_{C(X)}(\hat{a}) \subset \mathbb{R}$. Выберем такие многочлены p_n , что $p_n(t)$ сходится равномерно к t^{-1} на $\text{Sp}_{C(X)}(\hat{a})$. Тогда $\widehat{a^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\hat{a})$, так что $a^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(a) \in C^*(a) \subset B$.

Для элемента a общего вида, если a^{-1} существует в A , то $a^{-1}(a^*)^{-1} = (a^*a)^{-1} \in B$ по доказанному. Поэтому $a^{-1} = (a^*a)^{-1}a^* \in B$. $\square$

Задача 41. Показать на примере, что без условия $1_A = 1_B$ предыдущая теорема не имеет места.

1.10 Топологии на $\mathbb{B}(H)$ и алгебры фон Неймана

Кроме топологии нормы, имеются и другие полезные топологии на C^* -алгебре $\mathbb{B}(H)$.

Определение 1.54. *Сильная топология* задается системой полунорм $a \rightarrow \|a\xi\|$, $\xi \in H$.

Слабая топология задается системой полунорм $a \rightarrow (a\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in H$.

Теорема 1.55. *Для линейного функционала $\varphi : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны:*

- (i) *Существуют такие $\xi_k, \eta_k \in H$, $k = 1, \dots, n$, что $\varphi(a) = \sum_{k=1}^n (a\xi_k, \eta_k)$ для любого $a \in \mathbb{B}(H)$;*
- (ii) *φ слабо непрерывен;*
- (iii) *φ сильно непрерывен.*

Доказательство. Очевидно, что (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii). Покажем, что из (iii) следует (i).

Сильная непрерывность φ означает, что прообраз $\{a : |\varphi(a)| < 1\}$ открытого единичного диска является открытым множеством в сильной топологии, то есть найдутся такие положительные константы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, что для любого $a \in \mathbb{B}(H)$ из $\|a\xi_k\| < \varepsilon_k$ (для всех $k = 1, \dots, n$) следует, что $|\varphi(a)| < 1$. Меняя при необходимости длину этих векторов, видим, что эквивалентным образом можно сказать, что существуют такие векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, что для любого $a \in \mathbb{B}(H)$ из $\max_k \|a\xi_k\| \leq 1$ следует, что $|\varphi(a)| \leq 1$. Тогда

$$|\varphi(a)| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|a\xi_k\|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.9)$$

Действительно, если $|\varphi(a)|^2 > \sum_{k=1}^n \|a\xi_k\|^2$ для некоторого a , то $|\varphi(a)| > \|a\xi_k\|$ для всех k , так что, так как их конечное число, можно найти такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $|\varphi(\alpha a)| > 1$, а $\max_k \|\alpha a\xi_k\| < 1$ (например, $\alpha^{-1} := (|\varphi(a)| + \max_k \|a\xi_k\|)/2$). Противоречие.

Положим $K := \bigoplus_{k=1}^n H$. Алгебра $\mathbb{B}(K)$ может быть отождествлена с алгеброй $n \times n$ -матриц с элементами из $\mathbb{B}(H)$. Пусть $\rho : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{B}(K)$ отображает $a \in \mathbb{B}(H)$ в диагональную матрицу со всеми диагональными элементами, равными a .

Обозначим $\xi := \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in K$ и заметим, что, положив $\psi(\rho(a)\xi) = \varphi(a)$, мы получим линейный функционал на замкнутом подпространстве $L \subset K$, где L — замыкание пространства $L_0 := \{\rho(a)\xi \mid a \in \mathbb{B}(H)\}$. Действительно, сначала надо проверить корректность определения ψ на L_0 : если $\rho(a)(\xi) = \rho(b)(\xi)$, то $(a-b)\xi_k = 0$ для $k = 1, \dots, n$. В частности, для сколь угодно большого $R > 0$ имеем $\|R(a-b)\xi_k\| \leq 1$, а значит, $|\varphi(R(a-b))| \leq 1$. Поэтому $|\varphi(a-b)| \leq 1/R$. В силу произвольности R получаем, что $\varphi(a-b) = 0$ и, тем самым, определение корректно на L_0 . Из (1.9) видим, что $|\psi(\rho(a))| \leq \|\rho(a)\xi\|$, так что $|\psi(\zeta)| \leq \|\zeta\|$ для любого $\zeta \in L_0$, а значит, и L . Итак, ψ — ограниченный функционал на L . По теореме Рисса о представлении функционалов, найдется такой вектор $\eta \in L \subset K$, что $\psi(\zeta) = (\zeta, \eta)$ для всех $\zeta \in L$ (считаем эрмитово произведение линейным по первому аргументу), так что $\varphi(a) = (\rho(a)\xi, \eta)$. Разложив на компоненты $\eta = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_n$, получаем $(\rho(a)\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n (a\xi_k, \eta_k)$. $\square$

Следствие 1.56. *Выпуклое множество в $\mathbb{B}(H)$ замкнуто в слабой топологии тогда и только тогда, когда оно замкнуто в сильной.*

Доказательство. Это сразу следует из предыдущей теоремы, поскольку, по теореме Хана-Банаха, замкнутые выпуклые множества получаются как пересечение замкнутых полупространств, соответствующих линейным функционалам. $\square$

Определение 1.57. Алгеброй фон Неймана называется C^* -подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая единицу (тождественный оператор) и замкнутая в слабой топологии.

Простейшими примерами являются $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}(H)$ (на самом деле, первая алгебра — частный случай второй).

Определение 1.58. Для множества $S \subseteq \mathbb{B}(H)$ обозначим через S' его *коммутант*, то есть множество всех таких операторов $a \in \mathbb{B}(H)$, что $as = sa$ для всякого $s \in S$.

Задача 42. Проверить, что

- Если S — самосопряженное, то и S' тоже.
- Коммутант любого множества — алгебра с единицей.
- Коммутант любого множества слабо замкнут.
- Таким образом, S' — алгебра фон Неймана для любого самосопряженного множества S .
- Если $S_1 \subset S_2$, то $S'_1 \supset S'_2$.
- Всегда $S \subset S''$.
- Поэтому $S' = S'''$, $S'' = S''''$ и т.д.

Теорема 1.59 (фон Неймана о бикоммутанте). Пусть A — C^* -подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая единичный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны.

- (i) $A = A''$;
- (ii) A слабо замкнута;
- (iii) A сильно замкнута.

Доказательство. Поскольку A является выпуклым подмножеством, то (ii) и (iii) эквивалентны по следствию 1.56. Поскольку A'' слабо замкнуто, то из (i) следует (ii). Остается показать, что из (iii) следует (i).

Для вектора $\xi \in H$ обозначим через p проекцию на замыкание V линейного подпространства, образованного векторами $a\xi$, $a \in A$. Заметим, что V является a -инвариантным для любого $a \in A$. Действительно, общий элемент $\eta \in V$ имеет вид $\eta = \lim_{\alpha} a_{\alpha}\xi$ для некоторой направленности. Тогда для любого $a \in A$ в силу непрерывности действия A на H ,

$$a\eta = a \lim_{\alpha} a_{\alpha}\xi = \lim_{\alpha} aa_{\alpha}\xi \in V.$$

Таким образом, $p\eta = \eta$ при $\eta \in V$. Поскольку $1 \in A$, то $\xi \in V$, так что $p\xi = \xi$. Поэтому $rap\zeta = ra\eta = a\eta = ar\zeta$ для любого $\zeta \in H$, где обозначено $\eta = p\zeta \in V$. Так что $rap = ar$ для любого $a \in A$. Отсюда $pa = (a^*p)^* = (pa^*p)^* = rap$ и получаем $ap = pa$, то есть $p \in A'$. Пусть $b \in A''$. Тогда $pb = bp$, так что $pb\xi = bp\xi = b\xi$ и $b\xi \in V$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $a \in A$, для которого $\|(b - a)\xi\| < \varepsilon$.

Теперь рассмотрим некоторые $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$ и определим $\xi := \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in K := H \oplus \dots \oplus H$. Пусть $\rho : \mathbb{B}(H) \rightarrow \mathbb{B}(K)$ — диагональное вложение. Легко видеть, что $\rho(A)'$ состоит из всех $n \times n$ -матриц с элементами из A' , а $\rho(A'') = \rho(A)''$ (задача 43). Применяя к этой ситуации первую часть доказательства, получаем, что для любого $b \in A''$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a \in A$, что $\|(\rho(b) - \rho(a))\xi\| < \varepsilon$. Это означает, что $\sum_{k=1}^n \|(b - a)\xi_k\|^2 = \|(\rho(b) - \rho(a))\xi\|^2 < \varepsilon^2$, так что мы можем сильно приблизить $b \in A''$ некоторым $a \in A$. $\square$

Задача 43. Проверить, что $\rho(A)'$ состоит из всех $n \times n$ -матриц с элементами из A' , а $\rho(A'') = \rho(A)''$.

Следствие 1.60. Если A — алгебра фон Неймана, то и A' — алгебра фон Неймана.

Определение 1.61. Центром алгебры называется множество ее элементов, коммутирующих со всеми ее элементами.

Следствие 1.62. Если A — алгебра фон Неймана, то и ее центр — алгебра фон Неймана.

Доказательство. Для подалгебры $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ имеем $Z = A \cap A'$. $\square$

Пусть $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ является C^* -алгеброй, содержащей единичный оператор. Тогда теорема о бикоммутанте утверждает, что A слабо (сильно) плотна в A'' . В этом результате есть тот недостаток, что приближение происходит элементами s , вообще говоря, неконтролируемой нормой. Это преодолевается следующей теоремой, которую мы приведем без доказательства, которое можно найти в [7, § 4.3].

Теорема 1.63 (Капланского о плотности). *Единичный шар A слабо (сильно) плотен в единичном шаре A'' . То же самое верно для множеств положительных элементов в этих единичных шарах и для множеств унитарных элементов.*

Определение 1.64. Если центр Z алгебры фон Неймана A состоит только из скалярных операторов (то есть $Z = \mathbb{C}1$), то A называется *фактором*.

Замечание 1.65. Следует отметить, что кроме непрерывного функционального исчисления для самосопряженных операторов, имеется борелевское функциональное исчисление — вместо приближения по норме непрерывных функций полиномами тут происходит приближение полиномами борелевских функций, а соответствующие операторы будут сходиться в слабой топологии. Точнее, пусть многочлены p_i сходятся монотонно и поточечно к борелевской функции f на спектре самосопряженного оператора $a \in \mathbb{B}(H)$. Тогда $p_i(a)$ — сильно сходящаяся последовательность операторов

(это утверждение из стандартного курса, см. например, (см. [5, глава V, теорема 5]). Поскольку все многочлены коммутируют с коммутантом самосопряженного оператора, то для любой борелевской функции f на спектре самосопряженного оператора a , оператор $f(a)$ лежит в $\{a\}''$.

Глава 2

Представления C^* -алгебр

2.1 Определение и основные свойства

Определение 2.1. *Представлением C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H называется $*$ -гомоморфизм из A в $\mathbb{B}(H)$.*

Определение 2.2. Представление C^* -алгебры A называется *алгебраически неприводимым*, если в H нет собственных инвариантных линейных подпространств (при действии операторами из образа представления). Представление *топологически неприводимо*, если нет замкнутых собственных инвариантных подпространств.

Скоро мы увидим, что для C^* -алгебр эти два понятия совпадают.

Лемма 2.3. *Представление π топологически неприводимо тогда и только тогда, когда $\pi(A)' = \mathbb{C}1$.*

Доказательство. Если $\pi(A)'$ содержит что-то, кроме скаляров, то оно содержит и самосопряженный нескаларный оператор (это сразу следует из разложения нескаларного оператора в линейную комбинацию двух самосопряженных $a = \frac{a+a^*}{2} + i \cdot \frac{a-a^*}{2i}$, которые тоже принадлежат коммутанту, и хотя бы один из них не является скалярным). Применяя борелевское функциональное исчисление (см. замечание 1.65) к этому самосопряженному оператору b , можем получить собственный проектор p в $\pi(A)'$. Именно, если оператор нескаларный, то у него, по крайней мере, две различные точки в спектре, скажем, t_0 и t_1 , и надо рассмотреть борелевскую функцию f , принимающую значения 0 и 1, причем $f(t_0) = 0$, $f(t_1) = 1$ (задача 44). (Можно также не применять исчисление, а просто взять подходящие спектральные проекторы из стандартной спектральной теоремы, которые по построению обладают необходимыми условиями коммутирования). Тогда pH — замкнутое инвариантное подпространство, так как $p \in \pi(A)'$.

Обратно, пусть $L \subset H$ — замкнутое $\pi(A)$ -инвариантное подпространство, а $p \in \mathbb{B}(H)$ — проектор на это подпространство. Тогда $\pi(a)p = p\pi(a)p$ для любого $a \in A$. Поэтому $p\pi(a) = (\pi(a^*)p)^* = (p\pi(a^*)p)^* = p\pi(a)p = \pi(a)p$ и $p \in \pi(A)'$. При этом p не является скалярным. $\square$

Задача 44. Проверить в доказательстве выше, что $f(b)$ — собственный проектор, поскольку $f^2 = f$ и $\text{Sp}(f(b)) = \{0, 1\}$.

Задача 45. Доказать более общий факт: если самосопряженный элемент a в C^* -алгебре с единицей имеет $\text{Sp}(a) = \{0, 1\}$, то a — нескаларный идемпотент.

Лемма 2.4. Пусть π — топологически неприводимое представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H . Тогда для любых $t \in \mathbb{B}(H)$, конечномерного подпространства $L \subset H$ и $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $a \in A$, что $\|a\| \leq \|t|_L\|$ и $\|(\pi(a) - t)|_L\| < \varepsilon$.

Доказательство. Так как π топологически неприводимо, то по лемме 2.3 $\pi(A)'$ совпадает со скалярами, а значит, $\pi(A)'' = \mathbb{B}(H)$. Поэтому $\pi(A)$ плотно в $\mathbb{B}(H)$ в слабой (сильной) топологии. Без ограничения общности, можем считать, что $\|t|_L\| = 1$. Положим $s = tp_L$, где p_L — проектор на L . Поскольку L конечномерно, то, по теореме Капланского о плотности, найдется такой $b \in A$, что $\|\pi(b)\| \leq 1$ и $\|(\pi(b) - s)|_L\| < \varepsilon/2$. Тогда имеется такой элемент $c \in A$, что $\pi(c) = \pi(b)$ и $\|c\| < \|\pi(b)\|(1 + \varepsilon/2)$. Положим $a := \frac{c}{1 + \varepsilon/2}$ (см. теорему 1.51). Тогда $\|a\| \leq 1$ и

$$\|(\pi(a) - t)|_L\| \leq \|(\pi(c) - t)|_L\| + \|\pi(a) - \pi(c)\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Лемма 2.5. Пусть π — топологически неприводимое представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H . Тогда для любых $t \in \mathbb{B}(H)$, конечномерного подпространства $L \subset H$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой $a \in A$, что $\pi(a)|_L = t|_L$ и $\|a\| \leq \|t\| + \varepsilon$.

Доказательство. По предыдущей лемме, найдется такой элемент $a_0 \in A$, что $\|a_0\| \leq \|t\|$ и $\|(\pi(a_0) - t)|_L\| < \varepsilon/2$. По индукции можем найти для каждого n такой элемент $a_n \in A$, что $\|a_n\| \leq 2^{-n}\varepsilon$ и $\|(\sum_{k=0}^n \pi(a_k) - t)p_L\| < 2^{-n-1}\varepsilon$. Действительно, предположим, что элементы найдены для некоторого n и всех меньших. Применяя предыдущую лемму к $s = -\sum_{k=0}^n \pi(a_k) + t$, тому же подпространству L и $2^{-n-2}\varepsilon$, находим такой элемент a_{n+1} , что $\|a_{n+1}\| \leq 2^{-n-1}\varepsilon$ и $\|(\sum_{k=1}^{n+1} \pi(a_k) - t)p_L\| < 2^{-n-2}\varepsilon$. Теперь положим $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Тогда $a \in A$ и очевидно, что $\|a\| \leq \|t\| + \varepsilon$ и $a|_L = t|_L$. □

Теорема 2.6. Всякое топологически неприводимое представление C^* -алгебры является алгебраически неприводимым.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $V \subset H$ — незамкнутое инвариантное пространство, а $\bar{V}$ — его замыкание. Оно тоже является инвариантным подпространством (так как действие непрерывно), так что $\bar{V} = H$. Возьмем $\eta \in H \setminus V$, для определенности нормы 1. Пусть $\xi \in V$ — ненулевой вектор, а t — такой оператор в H , что $t\xi = \eta$. Тогда по предыдущей лемме найдется такой $a \in A$, что $\pi(a)\xi = \eta$. Противоречие с инвариантностью V . □

2.2 Положительные линейные функционалы

Определение 2.7. Линейный функционал (пока не требуем непрерывности, см. лемму 2.10 ниже) φ на C^* -алгебре A называется *положительным*, если $\varphi(a) \geq 0$ для любого $a \geq 0$. Если положительный линейный функционал непрерывен и имеет норму 1, то он называется *состоянием*.

Пример 2.8. Если π — представление A в гильбертовом пространстве H , а $\xi \in H$, то функционал $\varphi(a) := (\xi, \pi(a)\xi)$ является положительным. Если у A имеется единица и $\|\xi\| = 1$, то такое φ является состоянием.

С каждым положительным линейным функционалом φ можно связать полуторалинейную форму на A , заданную формулой $\langle a, b \rangle := \varphi(a^*b)$, то есть форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ линейна по второму аргументу, сопряженно линейна по первому аргументу. По определению положительности функционала $\langle a, a \rangle = \varphi(a^*a) \geq 0$ для любого $a \in A$. Поэтому по следующей лемме она эрмитово симметрична: $\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$.

Лемма 2.9 (из курса линейной алгебры). *Если у полуторалинейной формы $\langle a, a \rangle \in \mathbb{R}$ для любого a , то она эрмитово симметрична.*

Доказательство. Запишем поляризационные тождества

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle, \quad (2.1)$$

$$\langle a + ib, a + ib \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, ib \rangle + \langle ib, a \rangle + \langle ib, ib \rangle = \langle a, a \rangle + i(\langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle) + \langle b, b \rangle. \quad (2.2)$$

Из первого получаем, что $\langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle$ является вещественным, а из второго — что $\langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle$ является мнимым. Значит, $\overline{\langle a, b \rangle} = \langle b, a \rangle$. $\square$

Таким образом, $\langle a, b \rangle$ — положительная эрмитова форма и, значит, для нее выполняется неравенство Коши-(Шварца-Буняковского): $|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$, то есть $|\varphi(a^*b)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b)$.

Лемма 2.10. *Положительные линейные функционалы непрерывны. Если u_λ — аппроксимативная единица в A , то $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$. В частности, если A имеет единицу, то $\|\varphi\| = \varphi(1)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала унитарный случай. Если $0 \leq a \leq 1$, то, поскольку φ положителен, получаем, что $0 \leq \varphi(a) \leq \varphi(1)$. Для $x \in A$ с $\|x\| \leq 1$ имеем $0 \leq x^*x \leq 1$, так что $|\varphi(x)|^2 = |\varphi(1 \cdot x)|^2 \leq \varphi(1) \cdot \varphi(x^*x) \leq \varphi(1)^2$ по неравенству Коши-Шварца-Буняковского. Значит, $\|\varphi\| \leq \varphi(1) \leq \|\varphi\|$.

Теперь рассмотрим неунитарный случай. Предположим, что φ не ограничен на единичном шаре A . Тогда он не ограничен на подмножестве единичного шара, состоящем из положительных элементов (поскольку любой элемент a разлагается в линейную комбинацию из четырех положительных элементов с нормами, не превосходящими $\|a\|$, см. (1.7)). Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует такой положительный элемент $a_k \in A$, что $\|a_k\| \leq 1$ и $\varphi(a_k) > 2^k$. Положим $a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in A$.

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $a \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$ и

$$\varphi(a) \geq \varphi\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(a_k)}{2^k} > n,$$

что невозможно. Таким образом, φ ограничен и в неунитальном случае.

Положим $m := \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$, причем предел существует, поскольку направленность является возрастающей и ограниченной $\|\varphi\|$ сверху. Тогда, для любого $x \in A$ с $\|x\| \leq 1$ имеем $|\varphi(x)| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(u_\lambda x)|$ в силу непрерывности φ . Поэтому, по неравенству Коши-Шварца-Буняковского имеем

$$|\varphi(x)|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(u_\lambda x)|^2 \leq \sup_{\lambda} \varphi(u_\lambda^2) \varphi(x^* x) \leq \sup_{\lambda} \varphi(u_\lambda) \varphi(x^* x) \leq m \|\varphi\|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такой элемент $x \in A$, что $\|\varphi\|^2 < |\varphi(x)|^2 + \varepsilon$. Тогда $\|\varphi\|^2 < m \|\varphi\| + \varepsilon$. Следовательно, $\|\varphi\|^2 \leq m \|\varphi\|$ и $\|\varphi\| \leq m$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ имеется u_{λ_0} , для которого $\varphi(u_{\lambda_0}) > m - \varepsilon$, то приходим к равенству $\|\varphi\| = m$. $\square$

Следствие 2.11. Если φ — состояние на C^* -алгебре с единицей, то $\varphi(1) = 1$.

Доказательство. По предыдущей лемме, $1 = \|\varphi\| = \varphi(1)$. $\square$

2.3 ГНС-конструкция (Гельфанд–Наймарк–Сегал)

Определение 2.12. Вектор $\xi \in H$ называется *циклическим* для $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(H)$, если $\pi(A)\xi$ плотно в H .

Теорема 2.13. Пусть φ — положительный линейный функционал на C^* -алгебре A . Тогда найдутся такие представление π_φ алгебры A в гильбертовом пространстве H и циклический вектор $\xi_\varphi \in H$, что $\|\xi_\varphi\|^2 = \|\varphi\|$ и $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \varphi(a)$ для всех $a \in A$.

Доказательство. Пусть $N := \{a \in A : \varphi(a^*a) = 0\}$. Тогда $N = \{a \in A : \varphi(b^*a) = 0 \text{ для всех } b \in A\}$ по неравенству Коши–Шварца–Буняковского. Поэтому N замкнуто как пересечение ядер непрерывных функционалов $a \mapsto \varphi(b^*a)$. Кроме того, N — левый идеал, поскольку $\varphi(b^*an) = \varphi((a^*b)^*n) = 0$ для любых $a, b \in A$ при $n \in N$, так что $an \in N$.

Определим эрмитово скалярное произведение на банаховом фактор-пространстве A/N формулой $(\dot{a}, \dot{b}) = \varphi(a^*b)$, где через $\dot{a}$ обозначен класс смежности $a + N$. Это произведение корректно определено, поскольку, если $n_1, n_2 \in N$, то $\varphi((a + n_1)^*(b + n_2)) = \varphi(a^*b) + \varphi((a + n_1)^*n_2) + \overline{\varphi(b^*n_1)} = \varphi(a^*b)$. Также выполняется $(\dot{a}, \dot{a}) > 0$ при $\dot{a} \neq 0$. Пусть H — гильбертово пространство, полученное из A/N пополнением по норме, заданной этим скалярным произведением. Обозначим через π_0 представление A в A/N (тут мы несколько расширяем понятие представления на предгильбертово пространство) по формуле $\pi_0(a)\dot{x} = (ax)^\cdot$, где $\dot{x} \in A/N$. Если $n \in N$, то $(a(x + n))^\cdot =$

$(ax)^*$, так что π_0 корректно определено. Оно является инволютивным, поскольку $(\pi_0(a)\dot{x}, \dot{y}) = \varphi((ax)^*y) = \varphi(x^*(a^*y)) = (\dot{x}, \pi_0(a^*)\dot{y}) = (\pi_0(a^*)^*\dot{x}, \dot{y})$ и $\pi_0(a^*)^* = \pi_0(a)$. При этом $\|\pi_0\| \leq 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\pi_0(a)\|^2 &= \sup_{\|\dot{x}\| \leq 1} \|\pi_0(a)\dot{x}\|^2 = \sup_{\|\dot{x}\| \leq 1} \varphi(x^*a^*ax) \leq \\ &\leq \sup_{\|\dot{x}\| \leq 1} \|a^*a\|\varphi(x^*x) \leq \|a\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому π_0 продолжается по непрерывности до представления π_φ алгебры A в H .

Если алгебра A унитарна, то положим $\xi_\varphi := \dot{1}$. Тогда $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \varphi(a)$ и ξ_φ является циклическим, поскольку $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = A/N$ плотно в H . Наконец, $\|\varphi\| = \varphi(1) = \|\xi_\varphi\|^2$.

Для алгебры A общего вида рассмотрим ее аппроксимативную единицу u_λ . Покажем, что $\dot{u}_\lambda$ является направленностью Коши. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой индекс $\alpha \in \Lambda$, что $\varphi(u_\alpha) > \|\varphi\| - \varepsilon$ (поскольку $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$ по лемме 2.10). Теперь найдем такой индекс $\beta \in \Lambda$, что $\beta \geq \alpha$ и $\|u_\lambda u_\alpha - u_\alpha\| < \varepsilon$ для любого $\lambda \geq \beta$. Тогда

$$\operatorname{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha)) = \varphi(u_\alpha) + \operatorname{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha - u_\alpha)) > \|\varphi\| - 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\alpha\|^2 &= \varphi((u_\lambda - u_\alpha)^2) = \varphi(u_\lambda^2) + \varphi(u_\alpha^2) - 2\operatorname{Re}(\varphi(u_\lambda u_\alpha)) \leq \\ &\leq \varphi(u_\lambda^2) + \varphi(u_\alpha^2) - 2(\|\varphi\| - 2\varepsilon) \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, при $\lambda, \mu \geq \beta$, имеем

$$\|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\mu\| \leq \|\dot{u}_\lambda - \dot{u}_\alpha\| + \|\dot{u}_\alpha - \dot{u}_\mu\| \leq 4\varepsilon^{1/2}.$$

Таким образом, $\dot{u}_\lambda$ — направленность Коши. Пусть $\xi_\varphi := \lim_{\lambda \in \Lambda} \dot{u}_\lambda \in H$. Тогда $(\xi_\varphi, \pi_\varphi(a)\xi_\varphi) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda a u_\lambda) = \varphi(a)$. Поскольку $\pi_\varphi(A)\xi_\varphi = A/N$, то ξ_φ — циклический. Из $\dot{a} = \pi_\varphi(a)\xi_\varphi$ следует, что

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_\varphi(u_\lambda)\dot{a} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi_\varphi(u_\lambda)\pi_\varphi(a)\xi_\varphi = \pi_\varphi(a)\xi_\varphi = \dot{a}$$

для любого $\dot{a} \in A/N$, так что направленность $\pi_\varphi(u_\lambda)$ сильно сходится к 1 **на H в силу ее ограниченности**. Поэтому $\|\varphi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} (\xi_\varphi, \pi_\varphi(u_\lambda)\xi_\varphi) = \|\xi_\varphi\|^2$. $\square$

2.4 Реализация C^* -алгебр как операторных алгебр в гильбертовом пространстве

Следствие 2.14. Любое состояние φ на C^* -алгебре A без единицы допускает единственное продолжение до состояния на A^+ .

Доказательство. Пусть π_φ — представление A , заданное ГНС-конструкцией. Положим $\pi_\varphi(1) = 1$. Тогда π_φ продолжается до представления A^+ и $\tilde{\varphi}(a) := (\xi_\varphi, \pi(a)\xi_\varphi)$ является состоянием. Оно единственно, поскольку должно выполняться $\tilde{\varphi}(1) = 1$ (следствие 2.11). $\square$

Задача 46. Пусть u_λ , $\lambda \in \Lambda$, — некоторая аппроксимативная единица в унитарной алгебре. Доказать, что $1 = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$.

Лемма 2.15. Пусть $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ — такой непрерывный линейный функционал, что $\|\varphi\| = 1 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u_\lambda)$ для некоторой аппроксимативной единицы u_λ . Тогда φ — состояние.

Доказательство. Сначала сведем доказательство к унитарному случаю. Пусть $\tilde{\varphi}$ — некоторое продолжение (по теореме Хана–Банаха) функционала φ до непрерывного функционала на A^+ . Пусть $\tilde{\varphi}(1) =: \alpha$. Поскольку $\|\tilde{\varphi}\| = 1$, то $|\alpha| \leq 1$. Из неравенства $\|2u_\lambda - 1\| \leq 1$ следует, что $|2 - \alpha| = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\varphi(2u_\lambda - 1)| \leq 1$. Таким образом, $\alpha = 1$. Значит, можем считать, что A унитарна и $\varphi(1) = 1$ (если A с самого начала была унитарной, то пользуемся задачей 46).

Покажем теперь, что $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, если $a = a^*$ (а значит, содержится в $[-\|a\|, \|a\|]$). Пусть a — самосопряженный элемент нормы 1. Тогда $\|a \pm in1\|^2 = \|a^2 + n^2 1\| = n^2 + 1$, так что $|\varphi(a) \pm in| \leq \sqrt{n^2 + 1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\varphi(a)$ содержится в пересечении всех дисков с центрами в $\pm in$ и радиусов $\sqrt{n^2 + 1}$. Это пересечение равно вещественному интервалу $[-1, 1]$.

Если $0 \leq a \leq 1$, то $\|2a - 1\| \leq 1$. Применяя предыдущее рассуждение к самосопряженному элементу $2a - 1$, получаем, что $-1 \leq 2\varphi(a) - 1 \leq 1$, так что $\varphi(a) \geq 0$ и φ является положительным. $\square$

Лемма 2.16. Пусть $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда имеется такое состояние φ на A , что $|\varphi(a)| = \|a\|$.

Доказательство. Если A без единицы, то будем работать в A^+ . Рассмотрим коммутативную C^* -алгебру $C^*(a)$. Тогда найдется такой мультипликативный линейный функционал φ_0 на $C^*(a)$, что $|\varphi_0(a)| = \|a\|$ (надо взять в качестве φ_0 отображение взятия значения в той точке $\text{Sp}(a)$, где функция $\hat{a}$ достигает своего максимума). Тогда $\varphi_0(1) = 1 = \|\varphi_0\|$. Рассмотрим продолжение φ_0 по теореме Хана–Банаха до функционала φ на A^+ . Тогда, поскольку $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$, то φ — состояние по лемме 2.15. $\square$

Следствие 2.17. Для любого $a \in A$ существуют такие представление π и единичный вектор ξ в пространстве представления, что $\|\pi(a)\xi\| = \|a\|$.

Доказательство. По предыдущей лемме, найдем такое состояние φ , что $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$. Пусть $\pi = \pi_\varphi$ и $\xi = \xi_\varphi$ получены для φ по ГНС-конструкции. Тогда

$$\|\pi(a)\xi\|^2 = (\xi, \pi(a^*a)\xi) = \varphi(a^*a) = \|a\|^2.$$

$\square$

Теорема 2.18 (Гельфанда–Наймарка). Любая C^* -алгебра изометрически $*$ -изоморфна C^* -подалгебре $\mathbb{B}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H . Если A сепарабельна, то и H может быть выбрано сепарабельным.

Доказательство. Положим $\pi = \bigoplus_{\varphi} \pi_{\varphi}$, где прямая сумма берется по всем состояниям A . Точнее, рассматривается гильбертова прямая сумма $H := \bigoplus_{\varphi} H_{\varphi}$ (пополнение по ℓ_2 норме пространства финитных отображений $\varphi \mapsto h_{\varphi} \in H_{\varphi}$, то есть наборов $h = \{h_{\varphi}\}$, $h_{\varphi} \in H_{\varphi}$, причем лишь конечное число h_{φ} отлично от нуля, а норма определяется как $\|h\|^2 = \sum_{\varphi} \|h_{\varphi}\|^2$) с диагональным действием $\pi(a)(\{h_{\varphi}\}) = \{\pi_{\varphi}(a)(h_{\varphi})\}$. Тогда, как видно из доказательства предыдущего следствия, $\|\pi(a)\| = \sup_{\varphi} \|\pi_{\varphi}(a)\| = \|a\|$. Если же A сепарабельна, то достаточно брать сумму по счетному набору φ_n , где $\|\pi_{\varphi_n}(a_n)\| = \|a_n\|$, для элементов a_n , образующих плотное подмножество в A . Тогда $\pi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_{\varphi_n}$, а соответствующее гильбертово пространство сепарабельно, поскольку каждое H_{φ_n} сепарабельно (как пополнение фактора сепарабельного пространства). $\square$

Определение 2.19. Построенное в теореме (в первой ее части) представление называется *универсальным представлением* A . Алгебра фон Неймана $\pi(A)''$, где π — универсальное представление, содержит $\pi(A) \cong A$ в качестве слабо плотного подмножества и называется *обертывающей алгеброй фон Неймана* для A .

Отметим, что универсальное представление является прямой суммой циклических. Получаем следующее утверждение.

Следствие 2.20. Пусть π — точное представление C^* -алгебры A . Тогда существуют такие циклические представления π_{λ} , $\lambda \in \Lambda$, что $\|\pi(a)\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi_{\lambda}(a)\|$ для любого $a \in A$.

2.5 Разложение Жордана

Лемма 2.21. Пусть φ — линейный функционал на A . Тогда $\varphi = \psi_1 + i\psi_2$, где ψ_1 и ψ_2 — самосопряженные.

Доказательство. Положим, как делали и для элементов алгебры,

$$\psi_1(a) = (\varphi(a) + \overline{\varphi(a^*)})/2 \quad \text{и} \quad \psi_2(a) = (\varphi(a) - \overline{\varphi(a^*)})/2i.$$

$\square$

Обозначим через A_{sa} множество всех самосопряженных элементов A . Тогда, очевидно, что A_{sa} является вещественным банаховым пространством.

Задача 47. Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на A и (вещественными) линейными функционалами на A_{sa} .

Для доказательства теоремы о разложении Жордана нам понадобится следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 2.22 (о продолжении положительных функционалов). Пусть $B \subset A$ — C^* -подалгебра, а $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ — положительный функционал. Тогда найдется такой положительный функционал $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$, что $\varphi'|_B = \varphi$ и $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.

Доказательство. Возможны следующие случаи:

- (а) обе алгебры имеют общую единицу,
- (b) A имеет единицу, а B — нет,
- (с) обе алгебры не имеют единицы,
- (d) B имеет единицу, а A — нет.
- (е) обе алгебры с 1, но $1_A \neq 1_B$.

В силу следствия 2.14, (с) и (b) сводятся присоединением единицы к (а) (для (b) нужно заметить, что $B^+ \cong B \oplus \mathbb{C}1_A$). В свою очередь, (d), очевидно, сводится к (е).

В случае (а) продолжим по теореме Хана-Банаха φ до некоторого $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{C}$ той же нормы. Тогда по лемме 2.10, $\|\varphi'\| = \|\varphi\| = \varphi(1) = \varphi'(1)$ и φ' — положительный по лемме 2.15.

В случае (е) рассмотрим C^* -подалгебру $B_1 := B \oplus \mathbb{C}1_A = B \oplus \mathbb{C}(1_A - 1_B)$ и продолжим φ до $\varphi_1 : B_1 \rightarrow \mathbb{C}$, положив $\varphi_1(1_A - 1_B) = 0$. Тогда $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a)$, где $a \in B_1$. Действительно, если $a \in B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B \cdot a) = \varphi(a)$, а если $a = 1_A - 1_B$, то $\varphi_1(a) = \varphi(1_B(1_A - 1_B)) = \varphi(0) = 0$. При этом единица B_1 — это 1_A . Кроме того, $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\| \cdot \|1_B\| = \|\varphi\|$, а $\varphi_1(1_A) = \varphi(1_B) = \|\varphi\|$. Значит, $\|\varphi_1\| = \|\varphi\| = \varphi_1(1_A) = \varphi_1(1_{B_1})$ и, по лемме 2.15, φ_1 — положительный. Таким образом, случай (е) тоже свелся к доказанному случаю (а). $\square$

Теорема Жордана о разложении меры в сумму положительной и отрицательной [6, гл. VI, §5, теорема 1] на языке функционалов (в смысле теоремы Рисса-Маркова-Какутани [9, гл. I, §6, теорема 4]) может быть записана так: для любого ограниченного вещественного линейного функционала $\tau : C(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ имеются такие положительные линейные функционалы τ_+ и τ_- , что $\tau = \tau_+ - \tau_-$ и $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$, где Ω — компактное хаусдорфово пространство, а $C(\Omega, \mathbb{R})$ — вещественная алгебра всех непрерывных функций на Ω .

Теорема 2.23 (Разложение Жордана). *Пусть ψ — самосопряженный линейный функционал на A . Тогда $\psi = \varphi_+ - \varphi_-$, где φ_+ и φ_- — положительные линейные функционалы на A , причем $\|\psi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех самосопряженных линейных функционалов нормы ≤ 1 , то есть $K \subset (A^*)_{sa}$. Тогда K — $*$ -слабо замкнутое подмножество единичного шара и, таким образом, $*$ -слабо компактно. Определим $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$\theta : A_{sa} \rightarrow C(K, \mathbb{R}), \quad \theta(a)(\tau) = \tau(a),$$

так что если $a \in A$, $a \geq 0$, то $\theta(a) \geq 0$ на K . В силу леммы 2.16 отображение θ является изометрией на образ.

Имеется естественная изометрия $\tau \mapsto \tau'$ вещественных пространств $(A^*)_{sa}$ и $(A_{sa})_{\mathbb{R}}^*$ (вещественные функционалы) (см. задачу 47). По теореме Хана-Банаха найдется такой функционал $\rho \in (C(K, \mathbb{R}))_{\mathbb{R}}^*$, что $\rho \circ \theta = \psi'$ и $\|\rho\| = \|\psi'\|$ (продолжение функционала с замкнутого подпространства $\theta(A_{sa})$). Тогда по теореме Жордана для мер (как объяснено выше перед формулировкой) найдутся такие положительные функционалы ρ_+ и ρ_- , что $\rho = \rho_+ - \rho_-$ и $\|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|$. Положим $\varphi'_+ := \rho_+ \circ \theta$ и $\varphi'_- := \rho_- \circ \theta$. Это функционалы из $(A_{sa})_{\mathbb{R}}^*$. Пусть φ_+ и φ_- соответствуют им при отождествлении с $(A^*)_{sa}$. Очевидно, что они удовлетворяют всем требованиям, кроме, быть может, условия на норму. Проверим его:

$$\|\psi\| = \|\psi'\| = \|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\| \geq \|\varphi'_+\| + \|\varphi'_-\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\| \geq \|\psi\|.$$

□

2.6 Линейные топологические пространства

Определение 2.24. Подмножество M линейного пространства называется *уравновешенным*, если для любого $v \in M$ вектор λv принадлежит M при любом $|\lambda| \leq 1$. В частности, M — звездное множество относительно нуля пространства.

Определение 2.25. Подмножество M линейного пространства называется *поглощающим*, если для любого вектора v пространства найдется такое число $\alpha > 0$, что $v \in \beta M$ при $|\beta| \geq \alpha$.

Определение 2.26. Линейное пространство, снабженное топологией, называется *линейным топологическим пространством* (ЛТП), если операции линейного пространства непрерывны.

В основном курсе функционального анализа доказываются следующие несложные утверждения (см. [6, гл. III, §5]):

Предложение 2.27. 1). База ЛТП состоит из сдвигов окрестностей нуля.

2). Любой вектор ЛТП и не содержащее его замкнутое множество имеют непесекающиеся окрестности.

Определение 2.28. ЛТП L удовлетворяет *условию гомотетии*, если для любой окрестности нуля W ее гомотетия λW — тоже окрестность нуля для любого $\lambda \neq 0$ из основного поля.

Замечание 2.29. Очевидно, что топология нормированного пространства удовлетворяет условию гомотетии.

Предложение 2.30. Для любой окрестности нуля U ЛТП L с условием гомотетии существует уравновешенная окрестность, в ней содержащаяся.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{C} \times L \rightarrow L$ (умножение), отображающее $(0, 0_L) \mapsto 0_L$. Тогда, в силу непрерывности, найдутся такие $\delta > 0$ и окрестность нуля W , что $\lambda W \subseteq U$ при $|\lambda| \leq \delta$ (добиться нестрогого неравенства можно, уменьшив δ из стандартного определения). Положим $W' := \cup_{0 < |\lambda| \leq \delta} \lambda W$. В силу 2.28, это W' — искомое. $\square$

Замечание 2.31. На самом деле, можно доказать, что базу окрестностей нуля ЛТП L можно выбрать из поглощающих уравновешенных множеств, а также, что условие гомотетии фактически не является условием, но нам это не понадобится (см. [1, §8.1]).

Нам будет нужен следующий важный результат.

Теорема 2.32. Пусть L — конечномерное пространство, $\dim L = n$. Тогда любая хаусдорфова топология τ , превращающая L в линейное топологическое пространство L_τ с условием гомотетии, совпадает с топологией евклидовой нормы $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v^i|^2$, где $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис L , а $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$.

Доказательство. Пространство L с евклидовой (или унитарной) топологией будем обозначать L_u , а окрестности нуля двух топологий — τ и евклидовой — обозначим через T и U , соответственно.

Рассмотрим произвольную T . Тогда найдется такая окрестность T_0 , что $T_0 + \dots + T_0 \subset T$ (n слагаемых) в силу непрерывности операции сложения. Для каждого k найдется такое $\varepsilon_k > 0$, что $v^k e_k \in T_0$ при $|v_k| < \varepsilon_k$ ($k = 1, \dots, n$). Пусть $\varepsilon := \min_k \varepsilon_k$, а $U := \{v \in L \mid \|v\| < \varepsilon\}$. Тогда $v^k e_k \in T_0$ для любого $v \in U$ и любого $k = 1, \dots, n$. Значит, $U \subset T$. Из доказанного, в частности, следует, что тождественное отображение $\iota : L_u \rightarrow L_\tau$ является непрерывным.

Обратно, пусть U — произвольная окрестность, можно считать, что $U = B(0, \varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε с границей (сферой) S , являющейся компактным множеством. Тогда $S = \iota(S)$ компактно в L_τ . Значит, оно замкнуто, поскольку топология хаусдорфова. Тогда найдется звездная окрестность нуля T (например, уравновешенная), не пересекающаяся с S в силу предложений 2.27 и 2.30. При этом $T \subseteq U$, поскольку иначе существует такой вектор $v \in T$, что $\|v\| \geq \varepsilon$, и если положить $\alpha := \varepsilon / \|v\|$, $w := \alpha v$, то $\alpha \leq 1$, так что $w \in T$ в силу звездности. Но $\|w\| = \varepsilon$, так что $w \in T \cap S = \emptyset$. Противоречие. $\square$

2.7 Конечномерные C^* -алгебры

Рассмотрим $*$ -слабую топологию на A , задаваемую системой полунорм $a \mapsto |\varphi(a)|$ для всех линейных функционалов φ . Из леммы 2.21 и теоремы 2.23 следует, что ту же топологию можно получить, ограничиваясь только полунормами, связанными с состояниями.

Заметим также, что соответствующее ЛТП обладает свойством гомотетии 2.28.

Лемма 2.33. Любая конечномерная C^* -алгебра содержит единичный элемент.

Доказательство. Если A конечномерна, то топология нормы совпадает с $*$ -слабой топологией по теореме 2.32. Пусть u_n — аппроксимативная единица алгебры A . Тогда для любого состояния φ последовательность $\varphi(u_n)$ является неубывающей и ограниченной и поэтому имеет предел. Переходя к линейным комбинациям, получаем сходимость для любого функционала на конечномерном пространстве A , в частности, для функционалов $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ двойственного базиса к некоторому базису $a_1, \dots, a_k$. Тогда имеется элемент $a \in A$ с $\varphi_i(a) = \lim_n \varphi_i(u_n)$. Рассматривая линейные комбинации φ_i , получаем, что $\varphi(a) = \lim_n \varphi(u_n)$ для любого φ . Поэтому u_n сходится к a в $*$ -слабой топологии, а значит, и по норме. Тогда $ax = xa = x$ для любого $x \in A$, так что $a = 1$. $\square$

Лемма 2.34. Пусть $I \subset A$ — идеал в конечномерной C^* -алгебре A . Тогда $I = Ap$ для некоторого центрального проектора (=идемпотента из центра) p .

Доказательство. Поскольку I конечномерен, то унитарен по лемме 2.33. Пусть $p \in I$ — единица I . Тогда для всякого $x \in A$ выполняется $xp \in I$, так что $p(xp) = xp$. Поэтому $px^*p = x^*p$ для любого $x \in A$, откуда $xp = pxp = px$ и p принадлежит центру A . Очевидно, что $p^2 = p$. $\square$

Лемма 2.35. Простая конечномерная C^* -алгебра A изометрически $*$ -изоморфна матричной алгебре M_n для некоторого n .

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $aAb \neq 0$ для любых ненулевых $a, b \in A$. Действительно, AaA является ненулевым идеалом (так как A с единицей и $0 \neq a = 1 \cdot a \cdot 1 \in AaA$), так что в силу простоты, $AaA = A$. Поэтому $1 = \sum_i x_i a y_i$ и $b = \sum_i x_i a y_i b$. Поэтому, если $a y b = 0$ для любого $y \in A$, то $b = \sum_i x_i (a y_i b) = 0$, что противоречит предположению.

Пусть B — некоторая максимальная коммутативная подалгебра A . Тогда она может быть отождествлена с $C(X) = \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C} \cdot e_n$ для некоторого n , где X состоит из n точек, а $e_i \in B$ обозначает элемент, соответствующий характеристической функции в точке i . При этом e_i являются проекторами с соотношениями $e_i e_j = 0$ для $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Поскольку $e_i A e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i A e_i = 0$ а B максимальная, то $e_i A e_i \subset B$. Поэтому $e_i A e_i = \mathbb{C} \cdot e_i$ (поскольку, очевидно, $0 \neq e_i A e_i \ni e_i$, или можно воспользоваться утверждением из начала доказательства).

Для любых i, j найдется такой $x = x_{ij} \in A$, что $x = e_i x e_j \neq 0$, $\|x\| = 1$. Действительно, в силу утверждения из начала доказательства, $e_i A e_j \neq 0$, так что имеется $x = e_i y e_j$ с $\|x\| = 1$. При этом $e_i x e_j = e_i e_i y e_j e_j = e_i y e_j = x$. Тогда $x^* x = e_j x^* e_i e_i x e_j \in e_j A e_j$, а значит, по доказанному, имеет вид αe_j , $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как $x^* x$ — положительный элемент, по норме равный единице, то $\alpha = 1$, так что $x^* x = e_j$. Аналогично, $x x^* = e_i$. Обозначим такой $x = x_{ij}$ для $j = 1$ через u_i , так что $u_i = e_i x e_1 = e_i u_i e_1$. Тогда $u_i^* u_i = e_1$, $u_i u_i^* = e_i$, $i = 1, \dots, n$. Положим $u_{ij} := u_i u_j^*$. При этом $u_i e_1 u_i^* = u_i u_i^* u_i u_i^* = e_i e_i = e_i$, так что $u_{ij} u_{ji} = u_i u_j^* u_j u_i^* = u_i e_1 u_i^* = e_i$. Также $e_j u_{ji} = u_j u_j^* u_j u_i^* = u_j e_1 u_i^* = u_j u_i^* u_i u_i^* = u_{ji} e_i$, и $e_i u_{ij} = u_i u_i^* u_i u_j^* = u_i e_1 u_j^* = u_i u_j^* u_j u_j^*$.

Если $x \in e_i A e_j$, то есть $x = e_i a e_j$, то $x u_{ji} = e_i a e_j u_{ji} = e_i a u_{ji} e_i \in e_i A e_i$, так что $x u_{ji} = \lambda e_i$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $x = x e_j = x u_{ji} u_{ij} = \lambda e_i u_{ij} = \lambda u_{ij}$, так что для любого $x \in A$ существует такое число $\lambda_{ij}(x) \in \mathbb{C}$, что $e_i x e_j = \lambda_{ij}(x) u_{ij}$.

Таким образом, $x = \sum_{i,j} e_i x e_j = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(x) u_{ij}$. Соответствие $x \mapsto (\lambda_{ij}(x))$ определяет изоморфизм $\kappa : A \rightarrow M_n$ (задача 48). $\square$

Задача 48. Проверить биективность и необходимые алгебраические свойства κ .

Теорема 2.36. Если A конечномерна, то $A = \bigoplus_k A p_k$, где p_k — центральные проекторы, а каждая $A p_k$ — матричная алгебра $M_{n(k)}$.

Доказательство. Для простой алгебры результат следует из леммы 2.35. Если A не является простой, то $I = A p$ по лемме 2.34, где p — центральный проектор. Тогда $A = I \oplus J$, где $J := A(1 - p)$. Тогда J — тоже идеал, поскольку $(1 - p)$ — тоже центральный проектор, так что $A(1 - p)A = AA(1 - p) \subseteq A(1 - p)$. При этом центр A , будучи конечномерной коммутативной алгеброй, изоморфен $\mathbb{C}^m$ (функциям на конечном множестве), а проекторам соответствуют характеристические функции. Далее рассуждаем по индукции, уменьшая размерность, пока не придем к сумме простых алгебр. $\square$

2.8 Невырожденные представления

Определение 2.37. Пусть π — представление C^* -алгебры A в гильбертовом пространстве H . Обозначим через $\pi(A)H$ (возможно незамкнутое) линейное пространство конечных линейных комбинаций вида $\sum_i \pi(a_i) \xi_i$, где $a_1, \dots, a_n \in A$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$. Представление π называется *невыврожденным*, если $\pi(A)H$ плотно в H .

Задача 49. Если у A есть единица, то π является невырожденным тогда и только тогда, когда $\pi(1) = 1$.

Лемма 2.38. Пусть $I \subset A$ — идеал, а π — невырожденное представление I в гильбертовом пространстве H . Тогда существует и единственно продолжение $\tilde{\pi}$ до представления $\tilde{\pi}$ всей алгебры A в H .

Доказательство. Определим $\tilde{\pi}$ сначала на векторах из плотного подпространства $\pi(I)H \subset H$ формулой

$$\tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) := \sum_i \pi(a j_i) \xi_i. \quad (2.3)$$

Определение корректно, поскольку, если $\sum_i \pi(j_i) \xi_i = \sum_i \pi(j'_i) \xi'_i$, то

$$\tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(u_\lambda j_i) \xi_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(a u_\lambda) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right)$$

и, аналогично, $\tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j'_i) \xi'_i \right) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(a u_\lambda) \left(\sum_i \pi(j'_i) \xi'_i \right)$, где $u_\lambda \in I$ — аппроксимативная единица I . Заметим, что существование последних пределов в цепочке следует из существования предпоследних — то есть, тем самым, для каждого из двух случаев обосновывается отдельно. Поскольку

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\pi}(a) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) \right\| &= \lim_{\lambda \in \Lambda} \left\| \pi(a u_\lambda) \left(\sum_i \pi(j_i) \xi_i \right) \right\| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\pi(a u_\lambda)\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i) \xi_i \right\| \leq \\ &\leq \|a\| \cdot \sup_{\lambda \in \Lambda} \|u_\lambda\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i) \xi_i \right\| = \|a\| \cdot \left\| \sum_i \pi(j_i) \xi_i \right\|, \end{aligned}$$

то $\tilde{\pi}$ ограничено, а значит, $\tilde{\pi}(a)$ продолжается до ограниченного оператора в H .

При этом, как легко проверить, $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$ и $\tilde{\pi}(a^*) = \tilde{\pi}(a)^*$ для любых $a, b \in A$, так что $\tilde{\pi}$ является представлением A . Единственность следует из того, что любое продолжение π должно удовлетворять (2.3). $\square$

Лемма 2.39. *В условиях леммы 2.38 представление π неприводимо тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть π приводится собственным инвариантным подпространством $L \subset H$. Тогда, в силу невырожденности, $H = \overline{\pi(I)(L + L^\perp)} \subseteq \overline{\pi(I)L} + \overline{\pi(I)L^\perp}$. Поскольку $L^\perp$ тоже инвариантно, то $\pi(I)L^\perp \subset L^\perp$, так что $\overline{\pi(I)L} = L$. Тогда $\overline{\tilde{\pi}(A)L} = \overline{\tilde{\pi}(A)\pi(I)L} = \overline{\pi(I)L} = L$ и L приводит $\tilde{\pi}$. В обратную сторону утверждение тривиально. $\square$

Лемма 2.40. *Пусть π — представление A в гильбертовом пространстве H , а $I \subset A$ — идеал. Тогда ортогональный проектор p на $\overline{\pi(I)H}$ лежит в центре $\pi(A)''$. Если π неприводимо и $\pi(I) \neq 0$, то $\pi|_I$ также неприводимо.*

Доказательство. Поскольку $\pi(A)\pi(I)H = \pi(I)H$, то $\overline{\pi(I)H}$ инвариантное пространство для $\pi(A)$, а значит, $p \in \pi(A)'$ (см. конец доказательства леммы 2.3). Если $x \in \pi(I)'$, то $x\pi(j)\xi = \pi(j)x\xi \in \pi(I)H$ для любых $j \in I$, $\xi \in H$, так что pH — инвариантное подпространство $\pi(I)'$ и, значит, $p \in \pi(I)''$. Поэтому

$$p \in \pi(I)'' \cap \pi(A)' \subset \pi(A)'' \cap \pi(A)',$$

что является центром $\pi(A)''$.

Если π неприводимо, то p — скалярный оператор (то есть 0 или 1) (см. лемму 2.3), а поскольку $\pi(I) \neq 0$, то $p = 1$. Значит, $\pi|_I$ является невырожденным. Тогда, по лемме 2.39, оно неприводимо. $\square$

Глава 3

Специальные классы C^* -алгебр

В этой главе мы опишем ряд интересных и полезных C^* -алгебр и классов C^* -алгебр.

3.1 C^* -алгебра компактных операторов

Мы рассмотрим в этом параграфе C^* -подалгебры C^* -алгебры $\mathbb{K}(H)$ компактных операторов в гильбертовом пространстве H . Мы будем говорить, что C^* -подалгебра алгебры $\mathbb{B}(H)$ *неприводима*, если ее тождественное представление неприводимо.

Определение 3.1. Проектор p называется *минимальным*, если не существует такого проектора $q \neq 0$, $q \neq p$, что $qp = q$. Другими словами, p не *доминирует* никакого нетривиального проектора.

Лемма 3.2. Любая ненулевая C^* -алгебра A , состоящая из компактных операторов, содержит минимальный проектор e и $eAe = \mathbb{C} \cdot e$. Если A неприводима, то e — проектор ранга 1 (как проектор в гильбертовом пространстве).

Доказательство. Поскольку A ненулевая, то она содержит ненулевой положительный оператор (см. (1.7)), который (как известно из основного курса функционального анализа (см. [9, теорема 1, стр. 360]), имеет дискретный спектр (кроме 0) с собственными значениями конечных кратностей. Рассмотрим спектральный проектор, соответствующий ненулевой точке спектра. Поскольку характеристическая функция этой изолированной точки является непрерывной на спектре, то этот проектор принадлежит A . Тогда среди доминируемых им ненулевых проекторов имеется некоторый проектор $e \in A$ минимального ранга среди доминируемых (поскольку у них конечные ранги). Тогда e — минимальный (единственность минимального и даже равенство рангов у разных минимальных не утверждается). Если eAe состоит не только из $\mathbb{C} \cdot e$, то тем же способом мы сможем построить проектор, доминируемый e и прийти к противоречию.

Предположим теперь, что A неприводима, но ранг e больше 1. Выберем пару ненулевых ортогональных векторов ξ, η в образе e . Поскольку для любого a существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $ea e = \lambda e$, то $(\xi, a\eta) = (e\xi, ae\eta) = (\xi, ea e\eta) = \lambda(\xi, \eta)$, то есть $a\eta \perp \xi$ для любого $a \in A$. Рассматривая все ξ из образа e , перпендикулярные η ,

видим, что подпространство $\overline{A\eta}$ является собственным инвариантным подпространством. Противоречие. $\square$

Лемма 3.3. *Единственной неприводимой C^* -подалгеброй $\mathbb{K}(H)$ является она сама.*

Доказательство. Пусть A — неприводимая C^* -подалгебра $\mathbb{K}(H)$, а $e \in A$ — минимальный проектор ранга 1. Тогда найдется такой вектор $\xi \in H$ единичной длины, что $e\eta = \xi(\xi, \eta)$ для любого η (берем ξ из образа e). В силу неприводимости, для любых $\eta, \zeta \in H$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a\xi = \eta$, $b\xi = \zeta$ (см. лемму 2.5). При этом $A \ni aeb^*$ и $aeb^*(\kappa) = a\xi(\xi, b^*\kappa) = \eta(\zeta, \kappa)$, $\kappa \in H$. Таким образом, A содержит все операторы ранга 1. Такие операторы порождают $\mathbb{K}(H)$ (любой компактный приближается конечномерными), так что $A = \mathbb{K}(H)$. $\square$

Следствие 3.4. *Алгебра $\mathbb{K}(H)$ является простой.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{K}(H)$ неприводима, то любой ее ненулевой идеал тоже неприводим (по лемме 2.40), так что он совпадает с $\mathbb{K}(H)$ (по лемме 3.3). $\square$

Следствие 3.5. *Пусть A — неприводимая C^* -подалгебра $\mathbb{B}(H)$, содержащая ненулевой компактный оператор. Тогда $\mathbb{K}(H) \subseteq A$.*

Доказательство. Поскольку $A \cap \mathbb{K}(H)$ — ненулевой идеал A , то он неприводим по лемме 2.40. По лемме 3.3 эта подалгебра $\mathbb{K}(H)$ должна совпадать со всей $\mathbb{K}(H)$. $\square$

3.2 AF-алгебры

Определение 3.6. Назовем C^* -алгебру *AF-алгеброй* (аппроксимативно конечномерной), если она является замыканием объединения возрастающей по вложению последовательности своих конечномерных C^* -подалгебр.

Задача 50. Доказать, что матричная алгебра M_n является простой при любом n (это не следует из леммы 2.35, из которой можно вывести, что M_n является простой при некотором n). *Указание:* для любого идеала $I \neq \{0\}$ рассмотрим матрицу из него с $a_{ij} \neq 0$. Путем умножения слева и справа на матрицы с 1 на одном месте и нулями на остальных, получите матрицу из I с единственным ненулевым элементом a_{ij} . Умножая на матрицы перестановок, получите аналогичные матрицы со всеми возможными i, j . Их линейные комбинации дают всю алгебру M_n .

Задача 51. Вывести из задачи 50 и леммы 2.35, что образ матричной алгебры M_n при $*$ -гомоморфизме — либо нулевая алгебра, либо алгебра, изоморфная M_n .

Задача 52. Доказать следующий почти очевидный факт: если p и q — проекторы одинакового ранга в M_n , то существует такая унитарная матрица u , что $q = u^*pu$.

Лемма 3.7. *Пусть $\varphi : M_n \rightarrow M_k$ — ненулевой $*$ -гомоморфизм, так что $p := \varphi(1_n)$ — самосопряженный проектор, где 1_n — единица M_n . Тогда $\text{rk}(p) = \text{Trace}(p)$ делится на $n = \text{rk}(1_n) = \text{Trace}(1_n)$.*

Доказательство. Рассмотрим одномерный ортогональный (самосопряженный) проектор $e \in M_n$. Тогда $\varphi(e)$ — самосопряженный проектор в M_k . Его ранг не зависит от выбора e , поскольку любой другой e' равен u^*eu (по задаче 52), где u — унитарный, так что

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\varphi(e')) &= \text{Trace}(\varphi(u^*eu)) = \text{Trace}(\varphi(u^*)\varphi(e)\varphi(u)) = \\ &= \text{Trace}(\varphi(u)\varphi(u^*)\varphi(e)) = \text{Trace}(\varphi(uu^*e)) = \text{Trace}(\varphi(e)). \end{aligned}$$

Если бы этот (один для всех) ранг был бы нулевой, то φ был бы нулевым. Значит, он равен $c \geq 1$. Рассмотрим теперь ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ (например, канонический) в $\mathbb{C}^n$ и обозначим соответствующие одномерные ортопроекторы через $[e_i]$, так что $[e_j][e_i] = 0$ при $i \neq j$. Тогда, поскольку $\varphi([e_i])\varphi([e_j]) = \varphi([e_i e_j]) = 0$ при $i \neq j$, получаем

$$\text{Trace}(p) = \text{rk}(\varphi(1_n)) = \text{rk}(\varphi([e_1] \oplus \dots \oplus [e_n])) = \text{rk}(\varphi([e_1])) + \dots + \text{rk}(\varphi([e_n])) = cn.$$

□

Определение 3.8. Отношение $c := \frac{\text{rk}(p)}{n}$ назовем *кратностью* φ .

Наряду со стандартным левым действием M_n на $\mathbb{C}^n$ рассмотрим левое действие M_n на себе умножением, так что каноническое разложение

$$M_n \cong \underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n}_{n \text{ раз}} = M_n[e_1] \oplus \dots \oplus M_n[e_n]$$

является разложением на простые модули (=неприводимые представления), где $[e_i] \in M_n$ — ортогональный проектор на базисный вектор e_i стандартного базиса. По-другому можно записать $[e_i] = e_i \otimes e_i^*$ (рассматривая матрицы как эндоморфизмы), где e^* — эрмитово сопряженный функционал для e , так что $[e_i]v = (e_i \otimes e_i^*)v = e_i(e_i, v)$. Для разных векторов получаем матричную единицу $e_{ij} = e_i \otimes (e_j)^*$, так что $[e_i] = e_{ii}$.

Лемма 3.9. *Любой неприводимый левый модуль M в M_n имеет вид $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$, где g, f — единичные (можно взять) векторы.*

Доказательство. Для левого действия модуль $M_n(g \otimes f^*) = \mathbb{C}^n \otimes f^*$ изоморфен $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием, а значит, неприводим. Поэтому, если $g \otimes f^* \in M$, то $M = M_n(g \otimes f^*)$. Остается показать, что M содержит элемент вида $g \otimes f^*$. Но это — любой оператор ранга 1. Действительно, если a — оператор ранга 1, то надо взять в качестве f единичный вектор, перпендикулярный его ядру, а $g = a(f)$. Наконец, если M — ненулевой, и $0 \neq b \in M$, то выберем $f \neq 0$ из его образа. Тогда $(f \otimes f^*)b$ — оператор ранга 1 из M . □

Теорема 3.10. *Пусть φ — (унитальный) $*$ -автоморфизм C^* -алгебры M_n . Тогда он является внутренним: $\varphi(a) = vav^*$ для любого a , где $v \in M_n$ — унитарный.*

Доказательство. Заметим, что φ является изоморфизмом между M_n , рассматриваемым как левый модуль над M_n со стандартным действием $a \cdot x$, и M_n , рассматриваемым как модуль с действием $a * x = \varphi(a) \cdot x$, поскольку $\varphi(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = a * \varphi(x)$. Так как $\varphi(M_n) = M_n$, то инвариантные и неприводимые модули для обоих действий одни и те же (последние описываются леммой 3.9), и $\varphi(\mathbb{C} \otimes e_i) = \mathbb{C} \otimes h_i$, причем, поскольку автоморфизм переводит прямую сумму в прямую сумму, то h_i образуют базис в $\mathbb{C}^n$ и, таким образом, определен изоморфизм $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $u : e_i \mapsto h_i$ (даже если считать $\|h_i\| = 1$, то u определен однозначно только с точностью до умножения на диагональную матрицу из комплексных чисел, по модулю равных единице). Таким образом, $\varphi(e_{ij}) = r_{ij} \otimes (h_j)^*$, где $r_{ij} \in \mathbb{C}^n$ — некоторые элементы. Аналогичное рассуждение с правыми модулями показывает, что $\varphi(e_{ij}) = g_i \otimes (s_{ij})^*$, где $v : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $v : e_i \rightarrow g_i$ — изоморфизм, а $s_{ij} \in \mathbb{C}^n$ — некоторые элементы. Из этих двух соотношений получаем, что $\varphi(e_{ij}) = \lambda_{ij} g_i \otimes (h_j)^*$, где λ_{ij} — некоторые числа. При этом (см. доказательство леммы 3.7) $\varphi([e_i]) = \lambda_{ii} g_i \otimes (h_i)^*$ является самосопряженным проектором, так что $h_i = \mu g_i$ и $g_i = (\lambda_{ij} \bar{\mu})(g_i \otimes (g_i)^*)(g_i) = (\lambda_{ij} \bar{\mu}) g_i$ и $\lambda_{ij} \bar{\mu} = 1$. Таким образом, можно считать, что $h_i = g_i$, $u = v$ и (новые) λ_{ij} удовлетворяют $\lambda_{ii} = 1$ для любого i . При этом g_i образуют ортонормированный базис (см. доказательство леммы 3.7), так что $u : e_i \mapsto g_i$ является унитарным. Из сохранения равенств $e_{ij} e_{ji} = e_{ii} = [e_i]$ и $e_{ij}^* = e_{ji}$ при гомоморфизме φ получаем, что $\lambda_{ij} \lambda_{ji} = 1$, $\bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ji}$, так что, в частности, λ_{ij} — комплексные числа, по модулю равные 1.

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$. Переходя, если нужно, от векторов g_i к $(\lambda_{1i})^{-1} g_i = \bar{\lambda}_{1i} g_i$ при $i = 2, \dots, n$, можем считать $\lambda_{1i} = \lambda_{i1} = 1$ при $i = 2, \dots, n$. При этом образ $\varphi(a)$ матрицы $a = \|a_{ij}\|$ записывается относительно ортонормированного базиса $\{g_i\}$ как $\|\lambda_{ij} a_{ij}\|$, а если матрица a была унитарная, то $\varphi(a)$ тоже должна быть унитарной. Пусть некоторое $\lambda_{ij} \neq 1$ (что возможно только при $i \neq j$, $i \neq 1$). Беря для этих i, j унитарную матрицу a с $a_{1i} = 1/\sqrt{2}$, $a_{1j} = 1/\sqrt{2}$, $a_{ii} = 1/\sqrt{2}$, $a_{ij} = -1/\sqrt{2}$ (и остальные в этих строках и столбцах, конечно, — нули), получим условие ортогональности этих строк в виде $0 = (1/\sqrt{2} \cdot 1)(1/\sqrt{2} \cdot 1) + (-1/\sqrt{2} \cdot \lambda_{ij})(1/\sqrt{2} \cdot 1) = (1 - \lambda_{ij})/2$, так что $\lambda_{ij} = 1$. Противоречие.

Итак, для любых i, j получаем, что $\varphi(e_i \otimes (e_j)^*) = v(e_i) \otimes (v(e_j))^* = v \cdot (e_i \otimes (e_j)^*) \cdot v^*$. Поскольку любая матрица является линейной комбинацией таких матричных единиц, то по линейности получаем требуемое равенство $\varphi(a) = v a v^*$. $\square$

Лемма 3.11. Пусть в условиях леммы 3.7 гомоморфизм φ является унитарным. Тогда φ определяется кратностью с точностью до унитарной эквивалентности (сопряжения) в M_k .

Доказательство. Пусть $f_i^1, \dots, f_i^c$ — ортонормированный базис в образе проектора $\varphi(e_i)$, $s = 1, \dots, n$. Обозначив через $[f_i^j]$ соответствующие одномерные попарно ортогональные проекторы, имеем $\varphi(e_i) = [f_i^1] + \dots + [f_i^c]$. Тогда $\{f_i^j\}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, c$, — ортобазис $\mathbb{C}^k$, $1_k = \sum_{i,j} [f_i^j]$. Если $u \in M_k$ — унитарная матрица, переводящая $\{f_i^j\}$ в канонический базис $\mathbb{C}^k$, причем $u f_i^j = e_{(i-1)n+j}$, то

$$[e_{(i-1)n+j}]x = e_{(i-1)n+j}(e_{(i-1)n+j}, x) = u f_i^j(u f_i^j, x) = u f_i^j(f_i^j, u^* x) = u[f_i^j]u^* x \quad (3.1)$$

для любого $x \in \mathbb{C}^k$. Поэтому

$$\varphi([e_i]) = [f_i^1] + \cdots + [f_i^c] = \sum_{j=1}^c u^*[e_{(i-1)n+j}]u = u^*\left(\sum_{j=1}^c [e_{(i-1)n+j}]\right)u. \quad (3.2)$$

Таким образом,

$$u\varphi(a)u^* = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_c(a) \end{pmatrix} \quad (\text{блочно-диагональная матрица}), \quad (3.3)$$

где $\varphi_i : M_n \rightarrow M_n$ — ненулевой гомоморфизм, а значит, изоморфизм ($i = 1, \dots, c$). Поэтому к нему можно применить теорему 3.10 и найти такой унитарный $v_i \in M_n$, что $\varphi_i(a) = v_i^* a v_i$. Обозначив $v = v_1 \oplus \cdots \oplus v_c$ (унитарный элемент из M_k), получаем, что Тогда $vi\varphi(a)u^*v^* = S_c(a)$ для любого $a \in M_n$, где $S_c : M_n \rightarrow M_k$, $k = cn$, — стандартный гомоморфизм кратности c :

$$S_c(a) = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \quad (\text{блочно-диагональная матрица с } c \text{ блоками, равными } a),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 3.12. Пусть φ — унитарный $*$ -гомоморфизм конечномерной C^* -алгебры $A = M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_k}$ в конечномерную C^* -алгебру $B = M_{m_1} \oplus \cdots \oplus M_{m_l}$. Тогда φ задается (с точностью до унитарной эквивалентности в B) некоторой $l \times k$ -матрицей $C = (c_{ij})$ с неотрицательными элементами, причем $\sum_{j=1}^k c_{ij}n_j = m_i$.

Доказательство. Пусть $\epsilon_i : B \rightarrow M_{m_i}$ — канонический эпиморфизм, а $\sigma_j : M_{n_j} \rightarrow A$ — каноническое вложение, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, k$. Тогда $\epsilon_i \circ \varphi$ — унитарный гомоморфизм A в M_{m_i} . Пусть c_{ij} — кратность $\varphi_{ij} = \epsilon_i \circ \varphi \circ \sigma_j : M_{n_j} \rightarrow M_{m_i}$ в смысле определения 3.8.

Заметим, что $\sigma_j(1_{n_j})$ — попарно ортогональные самосопряженные проекторы в A , в сумме дающие единицу, так что $p_{ij} := \varphi_{ij}(1_{n_j})$ — попарно ортогональные самосопряженные проекторы в M_{m_i} , в сумме также дающие единицу. Поэтому, как и ранее, их прямая сумма унитарно эквивалентна при помощи u_i в M_{m_i} сумме соответствующих диагональных проекторов $u_i p_{ij} u_i^*$. Применяя лемму 3.11 к каждому из $a \mapsto u_i \varphi_{ij}(a) u_i^*$, получаем, что $\epsilon_i \circ \varphi$ унитарно эквивалентен (в M_{m_i}) гомоморфизму $\text{id}_{n_1}^{c_{i1}} \oplus \cdots \oplus \text{id}_{n_k}^{c_{ik}} = S_{c_{i1}} \oplus \cdots \oplus S_{c_{ik}}$. Сравнение размерностей дает равенство $\sum_{j=1}^k c_{ij}n_j = m_i$. Поскольку φ определяется прямой суммой $\epsilon_i \circ \varphi$, $i = 1, \dots, l$, то утверждение доказано. $\square$

Задача 53. Предположим, что в предыдущей лемме мы отказались от требования унитарности. Доказать аналог леммы в этом случае. Именно, взять вместо B подалгебру $\varphi(A) = p\varphi(A)p$ в B , где $p = \varphi(1_A)$, применить предыдущую лемму к $\varphi : A \rightarrow \varphi(A)$ и получить утверждение леммы с неравенствами $\sum_{j=1}^k c_{ij}n_j \leq m_i$ вместо равенств.

Определение 3.13. Любой $*$ -гомоморфизм между конечномерными C^* -алгебрами может быть представлен следующим графическим способом. Представим A в виде k -набора $\{(1, 1) = n_1, \dots, (1, k) = n_k\}$, соответствующего $A \cong M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$, а B — в виде l -набора $\{(2, 1) = m_1, \dots, (2, l) = m_l\}$, соответствующего $B \cong M_{m_1} \oplus \dots \oplus M_{m_l}$. Изобразим φ при помощи стрелок между элементами наборов, причем из $(1, j)$ в $(2, i)$ проведем c_{ij} стрелок, чтобы показать частичную кратность. Последовательность таких картинок для последовательности вложений $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_p \subset \dots$ называется *диаграммой Браттели последовательности*. Иногда ее называют диаграммой Браттели алгебры, но одна и та же алгебра может быть получена из разных последовательностей.

Задача 54. Нарисовать диаграммы Браттели для (некоторых определяющих последовательностей) следующих AF-алгебр:

- 1) алгебры компактных операторов $\mathbb{K}(H)$;
- 2) ее унитализации $\mathbb{K}(H)^+$;
- 3) замыкание объединения $A_p = M_{2^p}$, с вложениями $A_p \subset A_{p+1}$ кратности 2 по формуле $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (CAR алгебра);
- 4) $C(K)$, где K — канторово множество, полученное из $[0, 1]$ последовательными удалениями средней трети соответствующих интервалов. Если K_p — множество, полученное на p -м шаге этого процесса, то A_p — алгебра непрерывных функций, постоянных на интервалах K_p ;
- 5) $C(X)$, где $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, а A_k состоит из всех функций, постоянных на $[0, 1/2^k]$.

Лемма 3.14. Если две диаграммы Браттели совпадают, то соответствующие им AF-алгебры изометрически $*$ -изоморфны.

Доказательство. Пусть A_n и B_n — две последовательности конечномерных C^* -алгебр с включениями $\alpha_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$, $\beta_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$. Поскольку диаграммы Браттели одинаковы, то для каждого n имеется изоморфизм $\varphi_n : A_n \rightarrow B_n$. Рассмотрим $\varphi_{n+1} \circ \alpha_n$ и $\beta_n \circ \varphi_n : A_n \rightarrow B_{n+1}$. Они могут отличаться лишь на унитарный $u_{n+1} \in B_{n+1}$, то есть $\beta_n \circ \varphi_n = \text{Ad}_{u_{n+1}} \varphi_{n+1} \circ \alpha_n$, где $\text{Ad}_{u_{n+1}}(a) = u_{n+1} a (u_{n+1})^*$.

Положим $\psi_1 = \varphi_1$, $v_1 = 1$. Определим по индукции $v_{n+1} = \beta_n(v_n) u_{n+1} \in B_{n+1}$, $\psi_{n+1} = \text{Ad}_{v_{n+1}} \varphi_{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_n \psi_n &= \beta_n \text{Ad}_{v_n} \varphi_n = \text{Ad}_{\beta_n(v_n)} \beta_n \varphi_n = \text{Ad}_{\beta(v_n)} \text{Ad}_{u_{n+1}} \varphi_{n+1} \alpha_n \\ &= \text{Ad}_{\beta_n(v_n) u_{n+1}} \varphi_{n+1} \alpha_n = \psi_{n+1} \alpha_n. \end{aligned}$$

При этом $\cup_{n=1}^{\infty} \psi_n : \cup_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ — изометрический $*$ -изоморфизм, так что замыкания тоже изоморфны. $\square$

Не надо думать, что AF-алгебры являются “маленькими” и что C^* -подалгебры AF-алгебр — снова AF-алгебры. Например, $C[0, 1]$ не является AF-алгеброй (поскольку единственная ее конечномерная C^* -подалгебра состоит из постоянных функций), но является C^* -подалгеброй AF-алгебры $C(K)$ функций на канторовом множестве. Действительно, пусть f — функция на K , принимающая плотное множество рациональных значений из промежутка $[0, 1]$. Например, ограничение “канторовой лестницы” $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ [6, гл. VI, §4] на K принимает все рациональные числа вида $p/2^s$ как свои значения. Ее спектр является замыканием этого множества, то есть равен всему интервалу $[0, 1]$. Таким образом, $C^*(1, f) \subset C(K)$ изометрически $*$ -изоморфна $C(\text{Sp}(f)) = C[0, 1]$.

3.3 Мультипликаторы

Будем называть C^* -подалгебру $\mathbb{B}(H)$ *невыврожденной*, если ее естественное представление в гильбертовом пространстве H является невырожденным.

Везде в этом параграфе $A, B \subset \mathbb{B}(H)$.

Определение 3.15. Оператор $x \in \mathbb{B}(H)$ называется *левым мультипликатором* A , если $xA \subset A$. Он называется *правым мультипликатором*, если $Ax \subset A$ и *двойным (или двусторонним) мультипликатором* или просто *мультипликатором*, если выполняются оба условия.

Очевидно, что всякий элемент алгебры A является ее мультипликатором, и что если у A есть единица, то всякий левый (правый) мультипликатор лежит в A .

Поскольку A слабо плотно в A'' , то мы можем перейти к замыканию $xA \subset A$ и получить $xA'' \subset A''$. Если A'' с единицей, то $x \in A''$.

Определение 3.16. Линейное отображение $\sigma : A \rightarrow A$ называется *левым централизатором*, если $\sigma(ab) = \sigma(a)b$ для любых $a, b \in A$. Линейное отображение $\sigma : A \rightarrow A$ называется *правым централизатором*, если $\sigma(ab) = a\sigma(b)$ для любых $a, b \in A$. Пара (σ_1, σ_2) называется *двойным централизатором*, если σ_1 — правый централизатор, σ_2 — левый централизатор и $\sigma_1(a)b = a\sigma_2(b)$ для любых $a, b \in A$.

Лемма 3.17. *Любой левый централизатор ограничен.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется такой элемент $x_n \in A$, что $\|x_n\| < 1/n$ и $\|\sigma(x_n)\| > n$. Значит, ряд $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n x_n^*$ сходится, так что $a \in A$ и $x_n x_n^* \leq a$. По лемме 1.46, x_n может быть записан в виде $x_n = a^{1/4} u_n$, где $\|u_n\| \leq \|a\|^{1/4}$. Поэтому для любого n имеем $\|\sigma(x_n)\| = \|\sigma(a^{1/4} u_n)\| \leq \|\sigma(a^{1/4})\| \cdot \|a^{1/4}\|$ — противоречие. $\square$

Теорема 3.18. *Если A невырождена, то имеется биективное соответствие между левыми (правыми, двойными) мультипликаторами и левыми (правыми, двойными) централизаторами.*

Доказательство. Если x — левый мультипликатор, то отображение $A \ni a \mapsto xa \in A$ — левый централизатор. Если $xa = ya$ для любого $a \in A$, то $(x - y)a = 0$ для любого $a \in A''$, так что $x = y$ в A'' .

Пусть σ — левый централизатор, а u_λ — аппроксимативная единица для A . Поскольку направленность $\{\sigma(u_\lambda)\}$ ограничена, то для нее имеется точка накопления в A'' (ограниченные множества слабо компактны в $\mathbb{B}(H)$ и точки накопления должны лежать в замыкании A). Обозначим одну из точек накопления через x . Для любого $a \in A$, направленность $\{u_\lambda a\}$ сходится по норме к a , так что $\sigma(u_\lambda a) = \sigma(u_\lambda)a$ сходится к $\sigma(a)$. Тогда $xa = \sigma(a) \in A$, так что x — левый мультипликатор. Если $xA = 0$, то $\sigma = 0$. Заметим, что если $y \in A''$ — другая точка накопления, то $xa = \sigma(a) = ya$ для любого $a \in A$, и $(x - y)a = 0$ для любого $a \in A''$ (ввиду сильной плотности A в A''), так что $x = y$ в A'' . Поэтому точка накопления в данном случае одна.

Аналогично доказывается для правых мультипликаторов и правых централизаторов.

Пусть теперь x — двойной мультипликатор. Тогда отображения $\sigma_2 : a \mapsto xa$ и $\sigma_1 : a \mapsto ax$ — левый и правый мультипликаторы, причем $\sigma_1(a)b = (ax)b = a(xb) = a\sigma_2(b)$ для любых $a, b \in A$, так что x определяет двойной централизатор. Обратно, если (σ_1, σ_2) — двойной централизатор, то, по доказанному, σ_1 определяет правый мультипликатор x_1 , а σ_2 — левый мультипликатор x_2 . При этом $ax_1b = \sigma_1(a)b = a\sigma_2(b) = ax_2b$ для любых $a, b \in A$, так что $x_1 = x_2$, а $x_1 = x_2$ — двойной мультипликатор. $\square$

Задача 55. Пусть $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(H)$ — вырожденное представление. Обозначив через H_0 инвариантное подпространство $H_0 := \{\xi \in H : \pi(a)(\xi) = 0 \text{ для любого } a \in A\}$. Доказать, что π индуцирует представление $\pi' : A \rightarrow \mathbb{B}(H/H_0)$, причем, если π было точным представлением (инъективным гомоморфизмом), то и π' будет таковым.

Замечание 3.19. Соответственно, до конца настоящего параграфа будем считать $A \subseteq \mathbb{B}(H)$ невырожденной, так что (двойные) мультипликаторы совпадают с двойными централизаторами.

Множество всех левых (правых) мультипликаторов A обозначается через $LM(A)$ ($RM(A)$), а множество всех мультипликаторов A — через $M(A)$.

Задача 56. Проверить, что $RM(A) = (LM(A))^*$ и что $M(A) = LM(A) \cap RM(A)$, так что $M(A)$ симметрично по отношению к инволюции.

Прямо из определения следует, что все три множества замкнуты по норме. Таким образом, $M(A)$ — C^* -алгебра (а остальные две — в общем случае только банаховы алгебры).

Задача 57. Пусть X — локально-компактное пространство, а $C_0(X)$, как и ранее — C^* -алгебра непрерывных функций, стремящихся к 0 на бесконечности. Доказать, что алгебра $M(C_0(X)) \subset L^\infty(X)$ может быть отождествлена с C^* -алгеброй $C_b(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на X .

Пример 3.20. Если $A = \mathbb{K}(H)$, то $M(\mathbb{K}(H)) \subseteq \mathbb{B}(H)$. При этом любой ограниченный оператор является мультипликатором (так как $\mathbb{K}(H)$ — идеал в $\mathbb{B}(H)$), так что $M(\mathbb{K}(H)) = \mathbb{B}(H)$.

Определение 3.21. Идеал $A \subset B$ называется *существенным*, если любой ненулевой идеал B имеет нетривиальное пересечение с A .

Обозначим через $A^\perp \subset B$ множество $A^\perp = \{x \in B : Ax = 0\}$.

Лемма 3.22. Идеал $A \subset B$ является существенным тогда и только тогда, когда $A^\perp = 0$.

Доказательство. Предположим, что $A^\perp = 0$, но A не является существенной. Тогда имеется такой ненулевой идеал $J \subset B$, что $A \cap J = \{0\}$. Возьмем $j \in J$, $j \neq 0$. Для любого $a \in A$ имеем $ja \in J \cap A$, так что $ja = 0$ и $0 \neq j \in A^\perp$ — противоречие.

Обратно, пусть A — существенный, но $A^\perp \neq 0$. Тогда найдется такой $x \in A^\perp$, что $x \neq 0$. Рассмотрим идеал BxB (замыкание множества всех линейных комбинаций элементов вида $\sum_i b_i x b'_i$, $b_i, b'_i \in B$) и выберем $y \in BxB \cap A$. Как известно (например, из леммы 1.46), любой элемент C^* -алгебры допускает разложение в произведение двух ее элементов, так что мы можем записать $y = z \cdot a$, где $z, a \in BxB \cap A$. Запишем $z = \sum_i b_i x b'_i$, так что $y = za = \sum_i b_i x (b'_i a) = 0$, поскольку $b'_i a \in A$, а значит, $x b'_i a = 0$, поскольку $x \in A^\perp$. Следовательно, $BxB \cap A = 0$ — противоречие с существенностью. $\square$

Лемма 3.23. Пусть $A \subset B$ — существенный идеал. Тогда существует вложение $B \subset M(A)$, тождественное на A .

Доказательство. Рассмотрим $b \in B$. Тогда b определяет левый и правый централизаторы A (так как A — идеал) $\sigma_2 : a \mapsto ba$ и $\sigma_1 : a \mapsto ab$, причем $\sigma_1(a)a' = (ab)a' = a(ba') = a\sigma_2(a')$ для любых $a, a' \in A$, так что b определяет двойной централизатор, а значит, мультипликатор. Так что определено отображение $\pi : B \rightarrow M(A)$, тождественное на A . Это отображение, очевидно, является $*$ -гомоморфизмом. Остается проверить инъективность π . Если $b \in \text{Ker } \pi$, то $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$ (см. доказательство теоремы 3.18), так что $bA = 0$, $Ab = 0$ и $b \in A^\perp$, а значит, $b = 0$. $\square$

Заметим, что соответствие $A \mapsto M(A)$ не является функтором. Например, для $A = \mathbb{K}(H)$ и $B = A^+$ рассмотрим вложение $A \subset B$. При этом $M(A) = \mathbb{B}(H)$, а $M(B) = B$. Очевидно, что вложение не продолжается на эти мультипликаторные алгебры. Тем не менее, в некоторых случаях переход к мультипликаторам имеет некоторые функториальные свойства.

Лемма 3.24. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ — сюръективный $*$ -гомоморфизм двух C^* -алгебр. Тогда он продолжается до $*$ -гомоморфизма $\bar{\varphi} : M(A) \rightarrow M(B)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in LM(A)$ — левый централизатор. Для любого $b \in B$ положим $\bar{\varphi}(\sigma)(b) := \varphi(\sigma(\varphi^{-1}(b)))$. Необходимо проверить корректность, то есть независимость от выбора представителя в $\varphi^{-1}(b) \subset A$. В силу линейности, достаточно проверить, что σ отображает $\text{Ker } \varphi$ в себя. Пусть $a \in \text{Ker } \varphi$. Представим его в виде $a = a_1 \cdot a_2$, где $a_1, a_2 \in \text{Ker } \varphi$. Тогда $\varphi(\sigma(a)) = \varphi(\sigma(a_1)a_2) = 0$, поскольку $\text{Ker } \varphi$ — идеал.

Таким образом, левый централизатор σ определяет отображение $\bar{\varphi}(\sigma)$, которое является левым централизатором B . Аналогично делается для правых и двойных централизаторов (задача 58). $\square$

Задача 58. Доказать, что $\bar{\varphi}(\sigma)$ является левым централизатором. Аналогично построить продолжение правого централизатора. Проверить, что для двойного централизатора получаем двойной централизатор.

Задача 59. Проверить, что в ситуации предыдущей леммы расширение $\bar{\varphi}$ также является сюръективным.

Задача 60. Доказать, что представление $\pi : A \rightarrow \mathbb{B}(H)$ невырождено тогда и только тогда, когда для некоторой аппроксимативной единицы u_λ алгебры A выполнено следующее условие: для любого вектора $\xi \in H$ найдется такое λ , что $u_\lambda(\xi) \neq 0$.

Лемма 3.25. Пусть $B \subset A$ — алгебра и C^* -подалгебра с общей аппроксимативной единицей u_λ . Тогда $M(B) \subset M(A)$.

Доказательство. Если A невырождена, то и B тоже невырождена в силу задачи 60. Так что $M(B) \subset B'' \subset A''$. Для любых $x \in A$ и $y \in M(B)$ имеем $yx = \lim yu_\lambda x \in A$, и аналогично, $xu \in A$, так что y — мультипликатор A . $\square$

3.4 Гильбертовы C^* -модули

Определение 3.26. Пусть M — банахово пространство (с нормой $\|\cdot\|$), которое в то же время является правым модулем над C^* -алгеброй A (действие A на M предполагается непрерывным). Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \rightarrow A$ — полуторалинейная форма (называемая *скалярным произведением*) со свойствами:

1. $\langle t, na \rangle = \langle t, n \rangle a$ для всех $t, n \in M$, $a \in A$;
2. $\langle t, n \rangle = \langle n, t \rangle^*$ для всех $t, n \in M$;
3. $\langle t, t \rangle \in A$ положителен для всех $t \in M$, а если он равен 0, то $t = 0$.

Мы называем M *гильбертовым C^* -модулем*, если $\|t\|^2 = \|\langle t, t \rangle\|$ для всякого $t \in M$.

Пример 3.27. Алгебра A является гильбертовым C^* -модулем над A , если мы определим скалярное произведение формулой $\langle a, b \rangle := a^*b$, $a, b \in A$.

Пример 3.28. Модуль A^n — гильбертов C^* -модуль над A со скалярным произведением, заданным формулой $\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle := \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$.

Лемма 3.29 (неравенство Коши(–Шварца–Буняковского)). $\|\langle n, m \rangle\|^2 \leq \|n\|^2 \|m\|^2$ для любых $n, m \in M$.

Доказательство. Для всех $A \in A$ мы имеем $\langle t - na, t - na \rangle \geq 0$, поэтому $\langle t, t \rangle - a^* \langle n, t \rangle - \langle t, n \rangle a + a^* \langle n, n \rangle \geq 0$. Возьмем $a = \frac{1}{\|n\|^2} \langle n, t \rangle$. Тогда $\langle t, t \rangle - \frac{2}{\|n\|^2} \langle t, n \rangle \langle n, t \rangle + \frac{1}{\|n\|^4} \langle t, n \rangle \langle n, n \rangle \langle n, t \rangle \geq 0$. Поскольку $\|n\|^2 = \|\langle n, n \rangle\| \geq \langle n, n \rangle$, то получаем, что $\langle t, t \rangle - \frac{1}{\|n\|^2} \langle t, n \rangle \langle n, t \rangle \geq 0$, так что $\langle t, n \rangle \langle n, t \rangle \leq \|n\|^2 \langle t, t \rangle$. Отсюда получаем требуемое неравенство. $\square$

Пример 3.30. Пусть M состоит из всех последовательностей (a_i) , $a_i \in A$, для которых ряд $\sum_{i=1}^\infty a_i^* a_i$ сходится в A (по норме). Скалярное произведение задается формулой $\langle (a_i), (b_i) \rangle := \sum_{i=1}^\infty a_i^* b_i$. По предыдущей лемме, этот ряд сходится. Данный гильбертов C^* -модуль очень важен для приложений. Он обычно обозначается через $l_2(A)$ и называется *стандартным гильбертовым C^* -модулем*.

Отображение $T : M \rightarrow M$ называется (ограниченным) *оператором* в гильбертовом C^* -модуле M , если оно линейно, ограничено и A -линейно (то есть, $T(ma) = T(m)a$ для любых $m \in M$, $a \in A$). Если $M = A$, то это определение совпадает с определением левых централизаторов.

Определение 3.31. Оператор T называется *допускающим сопряженный*, если имеется такой оператор S , что $\langle m, T(n) \rangle = \langle S(m), n \rangle$ для любых $m, n \in M$. В этом случае S называется *сопряженным оператором* для T и обозначается $T^\star$. Обозначим через $\mathbb{B}_A^\star(M)$ множество операторов, допускающих сопряженный.

В отличие от гильбертовых пространств, в гильбертовых C^* -модулях имеются ограниченные операторы, не допускающие сопряженного.

Задача 61. Построить пример оператора, не допускающего сопряженного.

Задача 62. Доказать, что $\|x\|_M = \sup_{y \in B_1(M)} \|\langle x, y \rangle\|_A$, где $B_1(M) \subset M$ — единичный шар.

Теорема 3.32. Алгебра $\mathbb{B}_A^\star(M)$ является C^* -алгеброй.

Набросок доказательства. Ключевыми являются следующие моменты.

1) Инволюция $\star : \mathbb{B}_A^\star(M) \rightarrow \mathbb{B}_A^\star(M)$ является изометрией. Действительно, в силу задачи 62,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in B_1(M)} \|Tx\| = \sup_{x, y \in B_1(M)} \|\langle Tx, y \rangle\| = \\ &= \sup_{x, y \in B_1(M)} \|\langle x, T^\star y \rangle\| = \sup_{y \in B_1(M)} \|T^\star y\| = \|T^\star\|. \end{aligned}$$

2) Для нормы выполнено C^* -свойство. Это следует из оценки

$$\|T^\star T\| \geq \sup_{x \in B_1(M)} \|\langle T^\star Tx, x \rangle\| = \sup_{x \in B_1(M)} \|\langle Tx, Tx \rangle\| = \|T\|^2$$

(в обратную сторону — это общее свойство операторной нормы с учетом пункта один).

3) Алгебра $\mathbb{B}_A^\star(M)$ замкнута как подалгебра банаховой алгебры B всех ограниченных $\mathbb{C}$ -линейных операторов $M \rightarrow M$ (с операторной нормой). Действительно, прежде всего, заметим, что банахова алгебра $\mathbb{B}_A(M)$ всех операторов замкнута в B как пересечение по всем $x \in M$, $a \in A$, замкнутых множеств $\text{Ker}(f_{x,a})$, где $f_{x,a} : B \rightarrow M$, $f_{x,a}(T) = T(xa) - T(x)a$, — ограниченное линейное отображение, $\|f_{x,a}\| \leq 2\|x\|\|a\|$. Пусть направленность элементов $T_\alpha \in \mathbb{B}_A^\star(M)$ сходится к $T \in \mathbb{B}_A(M)$, в частности, является направленностью Коши. По пункту 1), направленность $T_\alpha^\star$ тоже является направленностью Коши, а значит, имеет предел $S \in \mathbb{B}_A(M)$. Легко видеть, что $S = T^\star$ и $T \in \mathbb{B}_A^\star(M)$. $\square$

Задача 63. Завершить доказательство теоремы 3.32.

Если $M = A$, то определение оператора, допускающего сопряженный, совпадает с определением двойного централизатора.

Определение 3.33. Оператор $\theta_{x,y}$, определенный формулой $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle$, называется *элементарным*.

Задача 64. Доказать, что $\theta_{x,y} \in \mathbb{B}_A^\star(M)$, предъявив явную формулу для сопряженного.

Определение 3.34. Замыкание множества $\mathbb{C}$ -линейных комбинаций элементарных операторов обозначается через $\mathbb{K}_A(M)$. Его элементы называются *A-компактными* операторами.

Задача 65. Доказать, что $\mathbb{K}_A(M)$ — идеал в $\mathbb{B}_A^\star(M)$.

Задача 66. Доказать, что $\mathbb{K}_A(A) = A$. Заметим, что если A без единицы, то $\mathbb{K}_A(A) = A \neq \mathbb{B}_A^\star(A) = DC(A)$ (алгебра двойных централизаторов).

3.5 Алгебра Калкина

Если гильбертово пространство H не является сепарабельным, то $\mathbb{B}(H)$ может быть достаточно сложным, в частности, иметь не только один собственный идеал. Например, идеалом является множество операторов с сепарабельным образом. Этого не происходит в случае сепарабельного H , которым мы обычно будем ограничиваться.

Определение 3.35. Фактор- C^* -алгебра $\mathbb{Q}(H) = \mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H)$ называется *алгеброй Калкина*.

Определение 3.36. Фактор- C^* -алгебра $M(A)/A$ называется *алгеброй внешних мультипликаторов*, или *обобщенной алгеброй Калкина*.

Лемма 3.37. Алгебра Калкина является простой.

Доказательство. Напомним, что мы рассматриваем сепарабельное H . Надо доказать, что $\mathbb{K}(H)$ — единственный идеал $\mathbb{B}(H)$. Пусть идеал $I \subset \mathbb{B}(H)$ содержит хотя бы один некомпактный оператор. Можно считать, что этот оператор положительный (так как любой оператор представляет собой линейную комбинацию четырех положительных). Обозначим его через t . Заметим, что поскольку $\mathbb{K}(H)$ — простая (по следствию 3.4), то либо $\mathbb{K}(H) \subseteq I$, либо $\mathbb{K}(H) \cap I = \{0\}$. Поскольку $t \notin \mathbb{K}(H)$, то можно считать, что найдется такое число $\alpha > 0$, что оба спектральных проектора $p_1 = p_{[0,\alpha)}$ и $p_2 = p_{[\alpha,\infty)}$ бесконечного ранга. Действительно, если p_2 с указанным свойством не найдется, то t является компактным вопреки предположению. Если при этом $p_1 = 0$, то t обратим, а значит, $I = \mathbb{B}(H)$, как и требовалось. Если $p_1 \neq 0$, но ранг его конечный, то имеем конечное число собственных значений, меньших α , так что для некоторой функции f , непрерывной на спектре, имеем $0 \neq f(t) \in \mathbb{K}(H)$. Значит, $\mathbb{K}(H) \subseteq I$. Поэтому $p_1 \in I$ и $t + p_1 \in I$ — обратимый и $I = \mathbb{B}(H)$. Итак, оба проектора p_1 и p_2 — бесконечного ранга. Пусть $H_i = \text{Im } p_i$, $i = 1, 2$. Тогда $H_1 \perp H_2$ и $H = H_1 \oplus H_2$. Поскольку H_1 и H_2 изоморфны в силу сепарабельности H , то имеется такая частичная изометрия $w \in \mathbb{B}(H)$, что $w|_{H_2} = 0$ и $w|_{H_1}$ отображает H_1 изометрически на H_2 . Поскольку спектральные проекторы коммутируют с t , то $tp_2 \geq \alpha \cdot 1_{H_2}$, где 1_{H_2} — тождественный оператор в H_2 . Кроме того, $w^*tw \geq \alpha \cdot 1_{H_1}$, а значит, $tp_2 + w^*tw \geq \alpha \cdot 1$. Поэтому $tp_2 + w^*tw \in I$ обратим, так что $I = \mathbb{B}(H)$. $\square$

Литература

- [1] В. И. БОГАЧЕВ, О. Г. СМОЛЯНОВ. *Действительный и функциональный анализ: университетский курс*. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2009.
- [2] У. БРАТТЕЛИ, Д. РОБИНСОН. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*. М.: Мир, 1982.
- [3] Ж. ДИКСМЬЕ. *C^* -алгебры и их представления*. М.: Наука, 1974.
- [4] А. А. КИРИЛЛОВ. *Элементы теории представлений*. М.: Наука, 1978.
- [5] А. А. КИРИЛЛОВ, А. Д. ГВИШИАНИ. *Теоремы и задачи функционального анализа*. М.: Наука, 1979.
- [6] А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. В. ФОМИН. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1974.
- [7] ДЖ. МЕРФИ. *C^* -алгебры и теория операторов*. М.: Факториал, 1997.
- [8] М. А. НАЙМАРК. *Нормированные кольца*. М.: Наука, 1968.
- [9] А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ. *Лекции по функциональному анализу*. М.: МЦНМО, 2004.
- [10] W. ARVESON. *An invitation to C^* -algebras. Graduate Texts in Math.* **39**. Springer, 1976.
- [11] A. CONNES. *Noncommutative geometry*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.
- [12] K. R. DAVIDSON. *C^* -algebras by example. Fields Institute Monographs* **6**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [13] I. GELFAND, M. NEUMARK. *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*. Матем. сб., 12(54):2 (1943), 197–217.
- [14] G. K. PEDERSEN. *C^* -algebras and their automorphism groups*. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Academic Press, London, second edition, 2018. Edited and with a preface by Søren Eilers and Dorte Olesen.
- [15] N. E. WEGGE-OLSEN. *K -theory and C^* -algebras*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach.