ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

(конспект лекций Е. В. Троицкого,
3-й курс, математики, осенний семестр 1997/98 уч.года)

1. Некоторые понятия общей топологии

Определение 1.1. *Метрикой* ρ на множестве X называется отображение $\rho : X \times X \to [0, \infty)$, удовлетворяющее аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Пара (X, ρ) называется *метрическим пространством.* Подпространство $Y \subset X$ автоматически является метрическим пространством.

Диаметром Y называется $\operatorname{diam} Y := \sup\limits_{x,y \in Y} \rho(x, y)$. Множество с конечным диаметром называется *ограниченным*. *Шаровой окрестностью* называется

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

Расстояние от $Y \subset X$ до $Z \subset X$ — $\rho(Y, Z) := \inf\limits_{y \in Y, z \in Z} \rho(y, z)$.

Если $\rho(y, Y) = 0$, то y — *точка прикосновения* Y. *Замыканием* Y называется $\overline{Y} :=$\{множество точек прикосновения Y\}. Очевидно, что $Y \subset \overline{Y}$. Множество Y называется *замкнутым*, если $Y = \overline{Y}$. Точка x называется *внутренней точкой* Y, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset Y$ (в частности, $x \in Y$). *Внутренностью* Y называется совокупность $\operatorname{Int} Y \subset Y$ его внутренних точек. Множество Y называется *открытым,* если $Y = \operatorname{Int} Y$.

Задача 1.2. Пусть X — метрическое пространство. Тогда $Y \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus Y$ замкнуто.

Теорема 1.3. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

1 О *X открыто;*

2 О *$\emptyset$ открыто;*

3 О *объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ любого набора открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$ открыто;*

4 О *пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ конечного набора открытых подмножеств $U_i \subset X$ открыто;*

1 З *$\emptyset$ замкнуто;*

2 З *X замкнуто;*

3 З *пересечение* $\bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ *любого набора замкнутых подмножеств* $F_\alpha \subset X$ *замкнуто;*

4 З *объединение* $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ *конечного набора замкнутых подмножеств* $F_i \subset X$ *замкнуто;*

Доказательство. В силу предыдущей задачи k О $\Rightarrow$ k З $\forall$ k. Свойства 1 О и 2 О очевидны. Докажем 3 О. Пусть $U = \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ и $x \in U$. Тогда найдется такое α, что $x \in U_\alpha$ и $B_{\varepsilon(\alpha)} \subset U_\alpha$. Тогда $B_{\varepsilon(\alpha)} \subset U_\alpha \subset U$.

Докажем 4 О. Пусть $U = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, $x \in U$. Тогда имеется набор ε_i $(i = 1, \ldots, k)$ таких, что $x \in B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Пусть $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Тогда $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ $\forall i$. Значит, $B_\varepsilon(x) \subset U$. □

Задача 1.4. Показать, что от конечности нельзя отказаться.
Задача 1.5. Доказать, что $B_\varepsilon(x)$ открыто.
Задача 1.6. Доказать, что $\operatorname{Int} Y$ открыто.
Задача 1.7. Доказать, что $\overline{Y}$ замкнуто.
Определение 1.8. *Топологией* на множестве X называется система его подмножеств τ (эти подмножества называются *открытыми*), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $X \in \tau$;

2) $\emptyset \in \tau$;

3) если $U_\alpha \in \tau$ $\forall \alpha \in A$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$;

4) если $U_1, \ldots, U_k \in \tau$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \tau$.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством.* Множество вида $F = X \setminus U$, где $U \in \tau$, называется *замкнутым.*
Задача 1.9. Проверить для замкнутых множеств свойства 1 З – 4 З.
Пример 1.10. Метрическое пространство является топологическим.
Задача 1.11. Привести пример топологического пространства (X, τ), не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).
Определение 1.12. *Окрестностью* точки $x \in X$ (подмножества $Y \subset X$) называется любое открытое множество ее (его) содержащее. *Точка прикосновения* $Y \subset X$ — такая точка $x \in X$, что любая ее окрестность имеет непустое пересечение с Y. *Замыкание* Y — это множество $\overline{Y}$ всех точек прикосновения Y (так что $Y \subset \overline{Y}$). Точка $x \in Y$ называется *внутренней* точкой Y, если найдется такая окрестность U точки x, что $x \in U \in Y$. Совокупность всех внутренних точек Y называется *внутренностью* Y и обозначается $\operatorname{Int} Y$.
Задача 1.13. $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.
Задача 1.14. $\overline{Y}$ замкнуто.
Определение 1.15. Пусть $Y \subset X$, (X, τ) — топологическое пространство. Топология $\tau_1 := \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ называется топологией, *индуцированной* τ на Y.

Задача 1.16. Проверить для τ_1 аксиомы топологии.

Задача 1.17. Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. Тогда топологию на $Y \subset X$ можно ввести двумя способами:

1) ρ_X порождает τ_X, которая индуцирует τ_1,

2) ρ_X при ограничении на Y дает ρ_Y, которая порождает τ_{ρ_Y}.

Доказать, что $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$.

Определение 1.18. Подмножество $Y \subset X$ называется *(всюду) плотным,* если $\overline{Y} = X$.

Задача 1.19. Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество.

Определение 1.20. Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности образа $V(f(x_0))$ существует такая окрестность $U(x_0)$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение, непрерывное в каждой точке, называется *непрерывным.*

Теорема 1.21. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $f : X \to Y$ *непрерывно;*

2) для любого открытого $V \subset Y$ *прообраз* $f^{-1}(V)$ *открыт в* X*;*

3) для любого замкнутого $F \subset Y$ *прообраз* $f^{-1}(F)$ *замкнут в* X*.*

Доказательство. Поскольку $f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$, то условия 2 и 3 эквивалентны.

Пусть теперь f непрерывно, $V \subset Y$ — открытое множество. Тогда либо прообраз V пуст, и, тем самым, открыт, либо содержит некоторую точку x: $f(x) \in V$. Тогда по определению для любой такой точки найдется такая окрестность $U(x)$, что $f(U(x)) \subset V$, т. е. $U(x) \subset f^{-1}(V)$. Таким образом, каждая точка $f^{-1}(V)$ — внутренняя.

Обратно, пусть выполнено условие 2. Тогда для $V = V(f(x_0))$ в качестве искомого U можно взять $U = f^{-1}(V)$. $\square$

Задача 1.22. Пусть $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые, $f : X \to Y$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{F_1} : F_1 \to Y$ и $f|_{F_2} : F_2 \to Y$ непрерывны.

Задача 1.23. Пусть $f_n : X \to \mathbf{R}$ — непрерывные функции, сходящиеся к f равномерно на X. Тогда f непрерывная.

Задача 1.24. Пусть X и Y — метрические пространства. Доказать, что $f : X \to Y$ непрерывна в точке x_0 в смысле отображений соответствующих топологических пространств тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Определение 1.25. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом,* если

1) f — биекция;

2) f и f^{-1} непрерывны.

Задача 1.26. Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

Определение 1.27. *Базой топологии* τ называется такая система открытых множеств $\mathcal{B}$, что любое τ–открытое множество представляется в виде их объединения.

Задача 1.28. Какие условия надо наложить на произвольную систему подмножеств $\mathcal{B}_1$, чтобы в результате взятия их произвольных объединений получить некоторую топологию ?

Определение 1.29. Пусть (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства. Рассмотрим в $X \times Y$ следующую базу топологии:

$$\mathcal{B} := \{V \times W \mid V \in \tau_X,\ W \in \tau_Y\}.$$

Полученное топологическое пространство называется *декартовым произведением* X и Y.

Задача 1.30. Проверить (с использованием предыдущей задачи), что $X \times Y$ действительно топологическое пространство.

Задача 1.31. Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

Задача 1.32. Доказать, что $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

Задача 1.33. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие расстояния:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{\rho_X(x_1, x_2),\ \rho_Y(y_1, y_2)\},$$

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2)},$$

$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать:

1) Что это метрики.

2) Что соответствующие топологии на $X \times Y$ совпадают.

Задача 1.34. Доказать, что подмножества прямой (a, b), $[a, b)$ и $[a, b]$ не гомеоморфны.

Определение 1.35. Топологическое пространство X называется *несвязным,* если выполнено одно из следующих (очевидно, эквивалентных) условий:

- Пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.
- Пространство X имеет непустое подмножество A, не совпадающее с X и являющееся одновременно открытым и замкнутым.
- Пространство X представляется в виде объединения двух непересекающихся непустых одновременно открытых и замкнутых множеств.

В противном случае X называется *связным.*

Определение 1.36. Пространство X называется *линейно связным,* если для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ существует непрерывное отображение (*путь*) $f : [0, 1] \to X$, $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$.

Задача 1.37. Отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$ связен и линейно связен.

Теорема 1.38. *Пусть* $X = \bigcup_{\alpha} X_\alpha$, *каждое* X_α *связно, а* $\bigcap_{\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$. *Тогда* X *связно.*

Доказательство. Пусть X несвязно, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A и B — непустые открыто-замкнутые. Тогда каждое $X_\alpha = (X_\alpha \cap A) \cup (X_\alpha \cap B)$. По определению индуцированной топологии эти множества открыто-замкнутые в X_α. Поскольку X_α связно, то одно из них пусто. Значит, каждое из X_α целиком содержится либо в A, либо в B, которые не пересекаются. При этом, так как A и B непусты, а X равно объединению X_α, то хотя бы по одному из X_α содержится в каждом из A и B. Значит, $\bigcap_{\alpha} X_\alpha = \emptyset$. Противоречие. □

Теорема 1.39. *Пусть в топологическом пространстве* X *для любых двух точек* x *и* y *имеется связное подпространство* P_{xy}, *их содержащее. Тогда* X *связно.*

Доказательство. Пусть X несвязно, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A и B — непустые открыто-замкнутые. Тогда найдутся $a \in A$, $b \in B$ и соответствующее P_{ab}. Тогда $P_{ab} = (P_{ab} \cap A) \cup (P_{ab} \cap B)$. Эти множества открыто-замкнуты в P_{ab} и непусты (первое содержит a, второе — b). Противоречие со связностью P_{ab}. □

Задача 1.40. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Теорема 1.41. *Линейно связное пространство связно.*

Доказательство. По предыдущей задаче $f([0,1])$ связно, где $f = f_{x_0,x_1}$ — из определения линейной связности. Положив $P_{x_0,x_1} := f([0,1])$, можем воспользоваться теоремой 1.39. □

Задача 1.42. Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

Определение 1.43. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым,* если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Задача 1.44. Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

Задача 1.45. Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

Задача 1.46. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве каждая точка замкнута.

Определение 1.47. Топологическое пространство X называется *нормальным,* если оно хаусдорфово и для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 существуют непересекающиеся окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

Задача 1.48. Всякое метрическое пространство нормально.

Определение 1.49. Покрытие $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ *измельчает* (является более мелким, чем) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, если для всякого β найдется такое $\alpha = \alpha(\beta)$, что $V_\beta \subset U_\alpha$.

Теорема 1.50. *Пусть* X — *нормальное топологическое пространство,* $\{U_i\}_{i=1}^N$ — *конечное открытое покрытие. Тогда существует более мелкое покрытие вида* V_i, $\overline{V}_i \subset U_i$.

Доказательство. Рассмотрим замкнутые множества

$$F_1 = \left(X \setminus \bigcup_{i=2}^{N} U_i\right) \subset U_1, \qquad \widetilde{F}_1 = X \setminus U_1,$$

и соответствующие в силу нормальности окрестности

$$V_1 \supset F_1, \qquad \widetilde{V}_1 \supset \widetilde{F}_1, \qquad V_1 \cap \widetilde{V}_1 = \emptyset.$$

Тогда

$$\overline{V}_1 \cap \widetilde{F}_1 = \emptyset, \qquad V_1 \subset \overline{V}_1 \subset (X \setminus \widetilde{F}_1) = U_1$$

и $(V_1, U_2, \ldots, U_N)$ — покрытие. Далее, заменяем U_2 на V_2 и т. д. $\square$

Задача 1.51. Пусть $f : X \to X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ замкнуто.

Задача 1.52. Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta := \{(x, y) \mid x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Задача 1.53. :

Лемма 1.54. (Урысона) *Пусть X — нормальное топологическое пространство, F_0 и F_1 — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что $f|_{F_0} = 0$, $f|_{F_1} = 1$.*

Доказательство. Из нормальности следует, что для любого замкнутого F и его окрестности U, $F \subset U$ найдется другая окрестность V, такая, что $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$, что будем обозначать $V \Subset U$.

Определим V_q для двоично-рациональных q индукцией по степени знаменателя (т. е. сначала для 0 и 1, потом для 1/2, потом для 1/4 и 3/4, потом для 1/8, 3/8, 5/8, 7/8 и так далее). Положим V_0 и V_1 равными тем непересекающимся открытым множествам, содержащим F_0 и F_1, которые существуют по определению нормальности. Пусть, по предположению индукции, V_q определены до 2^k в знаменателе q. Рассмотрим

$$F := \overline{V_{\frac{i}{2^k}}}, \qquad U := V_{\frac{i+1}{2^k}},$$

тогда положим $V_{\frac{2i+1}{2^{k+1}}} := V$, фигурирующем для F и U в рассуждении из начала доказательства.

Полученные V_q являются открытыми по построению, причем

1) $F_0 \subset V_0$,

2) $V_1 \Subset (X \setminus F_1)$,

3) если $q_1 < q_2$, то $V_{q_1} \Subset V_{q_2}$.

Определим для любого $s \in [0, 1]$: $V_s := \bigcup\limits_{q \leq s} V_q$. Тогда V_s открыто для любого s (как объединение открытых) и удовлетворяет 1 – 3. Действительно, 1 и 2 очевидны, а 3 следует из того, что между любыми двумя числами можно найти два двоично-рациональных.

Теперь определим функцию $f : X \to [0,1]$, положив $f|_{F_0} = 0$ и $f(x) := \sup\{s \mid x \notin V_s\}$. Покажем, что f непрерывна. Пусть x_0 и $\varepsilon > 0$ произвольны. Пусть $s_0 = f(x_0)$. Рассмотрим

$$U(x_0) := V_{s_0+\frac{\varepsilon}{4}} \setminus \overline{V_{s_0-\frac{\varepsilon}{4}}}.$$

Это действительно окрестность x_0, причем для любого $x \in U(x_0)$

$$x \in V_{s_0+\frac{\varepsilon}{4}}, \qquad x \notin \overline{V_{s_0-\frac{\varepsilon}{4}}},$$

так что

$$s_0 - \frac{\varepsilon}{4} \le f(x) \le s_0 + \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square$$

Задача 1.55. Замкнутое подмножество замкнутого подмножества замкнуто в объемлющем пространстве.

Задача 1.56. (Теорема Титце о продолжении) Пусть X — нормальное топологическое пространство, $f : F \to \mathbf{R}$ — непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g : X \to \mathbf{R}$. Если f ограничена, то и g можно выбрать ограниченной той же константой.

Определение 1.57. *Носителем функции* $f : X \to \mathbf{R}$ называется

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Теорема 1.58. *Пусть X — нормальное топологическое пространство, $\{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие непрерывные функции $\psi_\alpha : X \to [0,1] \subset \mathbf{R}$, что*

1) $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\alpha$,

2) $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) \equiv 1$.

Система функций ψ_α называется разбиением единицы, подчиненным $\{U_\alpha\}$.

Замечание 1.59. Достаточно локальной конечности $\{U_\alpha\}$: у каждой точки существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом $\{U_\alpha\}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.50 найдем новые покрытия $W_\alpha \Subset V_\alpha \Subset U_\alpha$. По лемме Урысона существуют непрерывные функции

$$\theta_\alpha : X \to [0,1], \qquad \theta_\alpha|_{\overline{W}_\alpha} \equiv 1, \qquad \theta_\alpha|_{(X \| \alpha)} \equiv 0.$$

Таким образом, $\operatorname{supp} \theta_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, а $\theta_\alpha|_{W_\alpha} > 0$. Положим $\theta := \sum_\alpha \theta_\alpha$. Это конечная сумма непрерывных функций и, таким образом, непрерывная функция. Поскольку $\{W_\alpha\}$ — покрытие, а $\theta \ge \theta_\alpha > 0$ на W_α, то $\theta > 0$. Значит, мы можем положить $\psi_\alpha := \frac{\theta_\alpha}{\theta}$. Очевидно, что оба условия выполнены. $\square$

Определение 1.60. Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 1.61. Доказать, что отрезок $[a,b]$ компактен.

Задача 1.62. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Задача 1.63. Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Теорема 1.64. *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \notin F$. Покажем, что существуют непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $V(F)$. В силу хаусдорфовости для любого $y \in F$ найдутся такие V_y и U_y, что $V_y \cap U_y = \emptyset$. Окрестности V_y образуют покрытие F, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $V_{y_1}, \ldots, V_{y_N}$, так как F компактно (см. задачу 1.62). Положим

$$V(F) := V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_N}, \qquad U(x) := \bigcap_{j=1}^{N} U_{y_j}.$$

Пусть теперь $F_1 \subset X$ и $F_2 \subset X$ — замкнутые. По первой части доказательства определим для каждого $x \in F_1$ открытые непересекающиеся множества $U(x) \supset x$ и $V(x) \supset F_2$. Тогда $\{U(x)\}$ — открытое покрытие F_1, из которого можно выделить конечное подпокрытие $U(x_1), \ldots, U(x_n)$. Множества $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i)$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V(x_i)$ — искомые непересекающиеся окрестности F_1 и F_2. $\square$

Задача 1.65. Доказать, что непрерывный образ компакта компактен.

Задача 1.66. Пусть $f : X \to \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда f ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

Задача 1.67. Пусть X — метрическое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

1) X компактно;

2) любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет сходящуюся подпоследовательность;

3) любая последовательность вложенных непустых замкнутых множеств $\{F_n\}$ (т. е. $F_n \supset F_{n+1}$) имеет непустое пересечение.

Задача 1.68. Декартово произведение компактных пространств является компактным.

2. Многообразия и касательные вектора

Определение 2.1. *Гладким многообразием* назывется сепарабельное хаусдорфово топологическое пространство M, снабженное *гладким атласом,* т. е. открытым покрытием $\{U_\alpha\}$ и набором гомеоморфизмов φ_α, отображающих U_α на открытые подмножества $V_\alpha \subset \mathbf{R}^m$ (m называется размерностью $\dim M$ многообразия M). Они задают в U_α *локальные координаты*. При этом требуется, чтобы отображения *замены координат* $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ были гладкими как вектор–функции, заданные на открытом множестве в $\mathbf{R}^m$. *Гладкой структурой* называется максимальный гладкий атлас.

Замечание 2.2. Если не требовать гладкости, то многообразие называется *топологическим.*

Задача 2.3. Привести пример многообразия с несогласованными гладкими структурами, т. е. с двумя такими гладкими атласами (U_i, φ_i) и (V_j, ψ_j), что $\{(U_i, \varphi_i), (V_j, \psi_j)\}$ не является гладким атласом.
Задача 2.4. Доказать, что S^n и $\mathbf{R}P^n$ являются гладкими многообразиями.
Задача 2.5. Будут ли гладкими многообразиями граница квадрата и восьмерка (подмножества $\mathbf{R}^2$) ?
Определение 2.6. $2n$-мерное многообразие называется *комплексно-аналитическим,* если все функции замены координат являются комплексно-аналитическими.
Задача 2.7. Доказать, что S^2 — комплексно-аналитическое многообразие.
Определение 2.8. Функция $f : M \to \mathbf{R}$ называется *гладкой,* если для любой точки $P \in M$ и некоторой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, содержащей P, функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to \mathbf{R}$, заданная на области в $\mathbf{R}^m$, является гладкой.
Задача 2.9. Доказать, что из гладкости по отношению к некоторой карте следует гладкость по отношению к любой.
Определение 2.10. Непрерывное отображение $f : M \to N$ гладких многообразий называется *гладким,* если для любой точки $P \in M$ и некоторых карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, содержащей P, и $(U'_\beta, \varphi'_\beta)$, содержащей $f(P)$, (это карты на M и N, соответственно) отображение $\varphi'_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to V'_\beta \subset \mathbf{R}^n$, заданное на области в $\mathbf{R}^m$ и называемое *локальным представлением* или *координатной записью* f, является гладким. Здесь $\dim M = m$ и $\dim N = n$.
Задача 2.11. Доказать, что из гладкости по отношению к некоторой паре карт следует гладкость по отношению к любой.
Определение 2.12. Биективное гладкое отображение $f : M \to N$ гладких многообразий называется *диффеоморфизмом,* если f^{-1} является гладким.
Задача 2.13. Проверить, что формулы

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^n)^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$x^k = \frac{y^k}{\sqrt{\varepsilon^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^n)^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

задают диффеоморфизм $B_\varepsilon(0) \subset \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n$.
Задача 2.14. Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

Лемма 2.15. *На любом гладком многообразии M существует атлас с картами, диффеоморфными открытому шару (откуда по задаче* 2.13 *всему* $\mathbf{R}^m$.)

Доказательство. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — некоторый атлас на M. Для любой $x \in M$ выберем $U_{\alpha(x)} \ni x$. Пусть $\varepsilon(x)$ столь мало, что $B_{\varepsilon(x)}(\varphi_{\alpha(x)}(x)) \subset V_{\alpha(x)} \subset \mathbf{R}^m$. Тогда

$$(\widetilde{U}_x, \widetilde{\varphi}_x), \quad x \in M, \qquad \widetilde{U}_x := \varphi_{\alpha(x)}^{-1}(B_{\varepsilon(x)}(\varphi_{\alpha(x)}(x))), \qquad \widetilde{\varphi}_x := \varphi_{\alpha(x)}|_{\widetilde{U}_x},$$

— искомый атлас. $\square$
Замечание 2.16. Для любого конечного атласа компактного многообразия существует подчиненное разбиения единицы, поскольку оно нормально.

Теорема 2.17. *Для любого конечного атласа компактного многообразия M существует подчиненное гладкое разбиения единицы.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно построить разбиение единицы для некоторого измельчения исходного атласа. В качестве такого измельчения выберем (существующий в силу леммы 2.15 и теоремы 1.50) такой атлас (W_β, τ_β), что

$$\tau_\beta(W_\beta) = B_1(0) \subset \mathbf{R}^m, \qquad W_\beta^\varepsilon := \tau_\beta^{-1}(B_{1-\varepsilon}(0)) \text{ — покрытие } M.$$

Определим гладкую функцию на $\mathbf{R}^m$:

$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\|x\|-(1-\varepsilon/2)^2)^2}}, & \text{при } \|x\| < (1-\varepsilon/2)^2, \\ 0, & \text{при } \|x\| \ge (1-\varepsilon/2)^2. \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{supp} h \subset B_{1-\varepsilon/2}(0), \qquad 0 \le h(x) \le 1, \qquad h(x) > 0 \text{ на } B_{1-\varepsilon}(0).$$

Положим

$$\chi_\beta := \begin{cases} h(\tau_\beta(x)), & \text{при } x \in W_\beta, \\ 0, & \text{при } x \notin W_\beta. \end{cases}$$

Тогда $\chi_\beta \in C^\infty(M)$, $0 \le \chi \le 1$, $\operatorname{supp} \chi_\beta \subset W_\beta$ и $\chi_\beta > 0$ на W_β^ε. Значит, $\psi := \sum_\beta \chi_\beta > 0$, а $\psi_\beta := \chi_\beta/\psi$ — искомое C^∞-разбиение единицы. $\square$

Теорема 2.18. *Пусть $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — гладкая функция, причем $\operatorname{grad} f \ne 0$ на $M = f^{-1}(y_0)$. Тогда M — гладкое многообразие. При этом в качестве локальных координат можно взять некоторые $n-1$ из $x^1, \dots, x^n$.*

Доказательство. Применяем теорему о неявной функции. Именно, пусть

$$\vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in M, \qquad \operatorname{grad}_{\vec{x}_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)\bigg|_{\vec{x}_0} \ne \vec{0}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_{\vec{x}_0} \ne 0$. По теореме о неявной функции найдутся окрестность V точки $(x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ в $\mathbf{R}^{n-1}$, интервал $(x_0^n - \varepsilon, x_0^n + \varepsilon) \in \mathbf{R}^1$ и C^∞-функция $g : V \to \mathbf{R}^1$ такие, что

1) $f(x^1, \dots, x^{n-1}, g(x^1, \dots, x^{n-1})) \equiv 0$ в V,

2) $g(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}) = x_0^n$,

3) $g(x^1, \dots, x^{n-1}) \in (x_0^n - \varepsilon, x_0^n + \varepsilon)$ при $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in V$,

4) всякая точка $(x^1, \dots, x^n) \in M \cap (V \times (x_0^n - \varepsilon, x_0^n + \varepsilon))$ удовлетворяет уравнению $x^n = g(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Определим карты следующим образом:

$$U := M \cap (V \times (x_0^n - \varepsilon, x_0^n + \varepsilon)), \quad \varphi : U \to \mathbf{R}^{n-1},\ \varphi(x^1, \dots, x^n) := (x^1, \dots, x^{n-1}) \in V.$$

Тогда, по 1) и 3) обратным к φ будет

$$\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}, g(x^1, \dots, x^{n-1})).$$

Проверим, что полученный атлас является гладким. Пусть, без ограничения общности, наряду с (U, φ) точка $\vec{x}_0$ содержится также в $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, где $\tilde{\varphi} : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^2, \dots, x^n)$. Тогда на $V \cap \tilde{V}$

$$\tilde{\varphi}\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) = \tilde{\varphi}(x^1, \dots, x^{n-1}, g(x^1, \dots, x^{n-1})) = (x^2, \dots, x^{n-1}, g(x^1, \dots, x^{n-1}))$$

— гладкая замена координат. □

Определение 2.19. (Тензорное определение касательного вектора) *Касательным вектором* ξ в точке $P \in M$ к многообразию M называется соответствие, которое каждой карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ (локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$) в окрестности P ставит в соответствие набор чисел $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^m)$. При этом выполняется тензорный закон, связывающий наборы чисел, которые ставятся в соответствие разным системам локальных координат. Именно, если карте (U_β, φ_β) (локальной системе координат $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$) ставится в соответствие набор чисел $(\xi_\beta^1, \dots, \xi_\beta^m)$, то

$$\xi_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} \xi_\alpha^j,$$

где по повторяющемуся вверху и внизу индексу j подразумевается суммирование.

Задача 2.20. (оправдание определения) Пусть $\gamma : (-1; 1) \to M$ — гладкое отображение. Тогда соответствие

$$\xi_\gamma : (x^1, \dots, x^n) \rightsquigarrow \left. \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right) \right|_{t=0}$$

является вектором. Здесь в локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ отображение γ задано как $(x^1(t), \dots, x^n(t))$.

Задача 2.21. Каждый касательный вектор в точке P однозначно определяется своими компонентами относительно одной системы координат.

Таким образом, касательное пространство $T_P(M)$ является конечномерным вещественным линейным пространством размерности $\dim M$. При этом, очевидно, операции не зависят от выбора локальной системы координат.

Определение 2.22. (Определение касательного вектора через кривые) Рассмотрим две гладкие кривые $\gamma_1 : (-1, 1) \to M$ и $\gamma_2 : (-1, 1) \to M$, удовлетворяющие условиям:

- $\gamma_i(0) = P$
- для некоторой (следовательно, любой) системы координат $(x^1, \dots, x^m)$ в окрестности P выполняется условие:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t)) \right]^2 = o(t^2), \qquad (t \to 0).$$

Такие кривые называются *соприкасающимися*: $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Все кривые, удовлетворяющие первому условию, разбиваются на классы соприкасающихся. Эти классы называются *касательными векторами* к M в точке P.

Определение 2.23. (Определение касательного вектора через дифференцирования) Линейное отображение $D : C^\infty(M) \to \mathbf{R}$, т. е. линейный функционал на пространстве гладких функций, называется *оператором дифференцирования* в точке $P \in M$, если

- значения его определяются только значениями функций в окрестности P, точнее, если $f, g \in C^\infty(M)$ таковы, что $f \equiv g$ на некоторой окрестности U точки P, то $D(f) = D(g)$ ("оператор задан на ростках функций");

- выполнено условие Ньютона–Лейбница
$$D(fg) = f(P)D(g) + g(P)D(f) \text{ для любых } f, g \in C^\infty(M).$$

Назовем такой оператор дифференцирования *касательным вектором* к M в точке P.

Задача 2.24. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности $P \in M$, $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, а $\xi \in T_P M$ имеет координаты ξ^i. Тогда соответствие
$$f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n)\xi^i$$
не зависит от выбора локальной системы координат и определяет оператор дифференцирования.

Теорема 2.25. *Определения эквивалентны, точнее, естественное соответствие*
$$\text{\textit{кривая}} \leftrightarrow \text{\textit{касательный вектор к кривой в данной системе координат}} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \text{\textit{дифференцирование по его направлению}}$$
порождает изоморфизм пространств касательных векторов в смысле трех определений.

Доказательство. Мы докажем эквивалентность первых двух. В силу задачи 2.20 достаточно (в одной системе координат) проверить что из $\gamma_1 \sim \gamma_2$ следует, что $\xi_{\gamma_1} = \xi_{\gamma_2}$.
$$0 = \lim_{t\to 0} \sum_{k=1}^m \left[\frac{x^k(\gamma_1(t)) - x^k(\gamma_2(t))}{t}\right]^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^m \left[\lim_{t\to 0} \frac{(x^k(\gamma_1(t)) - x^k(P)) - (x^k(\gamma_2(t)) - x^k(P))}{t}\right]^2,$$
откуда $\xi_{\gamma_1} = \xi_{\gamma_2}$.

Определение 2.26. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение, $P \in M$. *Дифференциалом (касательным отображением)* f в точке P называется отображение касательных пространств $df_P : T_P M \to T_{f(P)} N$, определенное одним из следующих эквивалентных способов, соответствующих трем определениям касательного вектора.

Первый способ. Пусть $(U^M, \varphi^M : U^M \to V^M \subset \mathbf{R}^m)$ — карта M в окрестности P, $(U^N, \varphi^N : U^N \to V^N \subset \mathbf{R}^n)$ — карта N в окрестности $f(P)$, $(x^1, \ldots, x^m)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ — соответствующие локальные системы координат. Локальное представление отображения f, точнее, отображение $\varphi^N \circ f \circ (\varphi^M)^{-1} : V^M \to V^N$, может быть описано как набор функций

$$y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, y^n = f^n(x^1, \ldots, x^m).$$

Пусть вектор $\xi \in T_P M$ ставит в соответствие системе координат $(x^1, \ldots, x^m)$ набор $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ (говорят: имеет указанные координаты в этой системе), тогда по определению полагают его образом $\eta = (df_P)\xi$ вектор с координатами

$$\eta^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \xi^i$$

(суммирование подразумевается) в системе $(y^1, \ldots, y^n)$.

Второй способ. Обозначим через $[\gamma]$ класс соприкасающихся кривых кривой γ. Положим

$$(df_P)[\gamma] := [f \circ \gamma].$$

Третий способ. Рассмотрим оператор дифференцирования ξ в точке $P \in M$. Тогда значение оператора дифференцирования $(df_P)\xi$ на функции $g \in C^\infty(N)$ задается формулой

$$((df_P)\xi)(g) := \xi(g \circ f).$$

Задача 2.27. Доказать эквивалентность трех определений дифференциала.

Определение 2.28. Рассмотрим гладкое отображение $f : M \to N$, $f(P_0) = Q_0$. Точка $P_0 \in M$ называется *регулярной точкой* f, если дифференциал

$$df_{P_0} : T_{P_0} M \to T_{Q_0} N$$

является эпиморфизмом (отображением "на"). Точка $Q_0 \in N$ называется *регулярным значением* f, если любое $P \in f^{-1} Q_0$ является регулярной точкой f.

Теорема 2.29. *Пусть $f : M \to N$, а $Q_0 \in N$ — регулярное значение f. Тогда $M_{Q_0} := f^{-1}(Q_0)$ является гладким многообразием, $\dim M_{Q_0} = \dim M - \dim N$. В качестве локальных координат в окрестности некоторой точки M_{Q_0} можно взять некоторые $(m - n)$ координат M.*

Доказательство. Применяем теорему о неявной функции. $\square$

Определение 2.30. Отображение $f : M \to N$ называется *погружением,* если в каждой точке $P \in M$ дифференциал $df_P : T_P M \to T_{f(P)} N$ является мономорфизмом. Если при этом $f : M \leftrightarrow f(M)$ взаимно однозначно, а $f(M)$ замкнуто в N, то $f(M)$ называется *вложением.*

Задача 2.31. Привести пример погружения, взаимно-однозначного на образ, но не являющегося вложением.

Определение 2.32. Вложение, являющееся гомеоморфизмом на образ, называется *вложением в сильном смысле.*

Задача 2.33. Для компактных многообразий вложение всегда является сильным.

Определение 2.34. Подмножество $L \subset M$, $\dim M = m$, называется *гладким подмногообразием,* если существует такой набор карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия M, что $\{U_\alpha \cap L\}$ — гладкий атлас L в том смысле, что

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap L} : U_\alpha \cap L \to V_\alpha \cap \mathbf{R}^l, \qquad \mathbf{R}^l \subset \mathbf{R}^m.$$

Этот атлас называется *нормальным.* Таким образом, $\dim L = l$, а $(m-l)$ называется *коразмерностью.* Часто целесообразно требовать также замкнутости L.

Задача 2.35. Привести пример такого вложения, что образ не является подмногообразием (и даже многообразием).

Теорема 2.36. *Подмножество $A \subset N$ является подмногообразием тогда и только тогда, когда оно является обрзаом некоторого многообразия M при вложении в сильном смысле.*

Доказательство. Если $A \subset N$ является подмногообразием, то тождественное отображение будет гомеоморфизмом на образ, а по определению подмногообразия — погружением.

Обратно, пусть $f : M \to N$ — сильное гладкое вложение. Свойство быть подмногообразием имеет локальный характер: достаточно рассмотреть открытое покрытие $\{N_i\}$ в N для A, и $A_i = A \cap N_i$. Это свойство инвариантно относительно C^∞-диффеоморфизмов: множество $A \subset N$ является подмногообразием тогда и только тогда, когда $g(A) \subset N'$ является подмногообразием, где $g : N \to N'$ — диффеоморфизм. Рассмотрим семейство карт $\Psi = \{\psi_i : N_i \to \mathbf{R}^n\}$ многообразия N, покрывающих A. Пусть $\Phi = \{\varphi_i : M_i \to \mathbf{R}^m\}_{i \in \Lambda}$ — такой атлас M, что $f_i(M_i) \subset N_i$ (если нужно, меняем индексацию). Поскольку f является вложением, в частности, гомеоморфизмом на образ, то можно выбрать Φ и Ψ так, что $f(M_i) = A \cap N_i$. Тогда в силу инвариантности относительно диффеоморфизмов ситуация сводится к следующей. $U := \{V_i\} = \varphi_i(M_i) \subset \mathbf{R}^m$, $f = f_i = \psi_i f \varphi_i^{-1} : U \hookrightarrow \mathbf{R}^n$ — C^∞-вложение. Требуется доказать, что $f(U)$ — подмногообразие. Но это просто теорема об обратной функции. Именно, локально существуют $(x^{i_1}, \ldots, x^{i_m})$, $1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le n$, и гладкое отображение $g : \mathbf{R}^m_x \to \mathbf{R}^{n-m}_x$, что это график. Таким образом, введя в окрестности в $\mathbf{R}^n$ координаты

$$(x^{i_1}, \ldots, x^{i_m}, x^{j_1} - (g(x^{i_1}, \ldots, x^{i_m}))^{j_1}, \ldots, x^{j_{n-m}} - (g(x^{i_1}, \ldots, x^{i_m}))),$$

получаем, что $f(U)$ задается как раз как координатная гиперплоскость. Подчеркнем, что локализовать задачу удалось только благодаря тому, что вложение в сильном смысле. $\square$

Замечание 2.37. Можно по-разному решать вопрос считать ли $(0,1) \times \{0\} \subset \mathbf{R}^2$ подмногообразием. Правильно все же не считать.

Теорема 2.38. (Лемма Сарда) *(без доказательства) Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение, M и N — компактные многообразия. Тогда множество $G \subset N$ регулярных значений f — открытое всюду плотное множество.*

Задача 2.39. Непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.

Теорема 2.40. (Слабая теорема Уитни) *Пусть M — гладкое компактное многообразие. Тогда найдется такое натуральное число p, что существует вложение (в сильном смысле) $f : M \to \mathbf{R}^p$.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^L$ — конечный атлас M, $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)$ — локальная система координат в U_α, причем $\varphi_\alpha : U_\alpha \approx B_\alpha = B_1(a_\alpha) \subset \mathbf{R}^m$, где $B_r(b)$ — шар радиуса r с центром в b. Пусть $B_\alpha^\varepsilon := B_{1-\varepsilon}(a_\alpha)$, причем $\{U_\alpha^\varepsilon := \varphi_\alpha^{-1}(B_\alpha^\varepsilon)\}$ по-прежнему покрывают M (возможно в силу нормальности). Выберем теперь

$$f_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^m), \qquad f_\alpha \equiv 1 \text{ на } B_\alpha^\varepsilon, \qquad \operatorname{supp} f_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha.$$

Пусть $g_\alpha^k : M \to \mathbf{R}$ определены для $k = 1, \dots, m$ и $\alpha = 1, \dots, L$ формулами

$$g_\alpha^k(P) := \begin{cases} f_\alpha(\varphi_\alpha(P))x_\alpha^k & \text{при } P \in U_\alpha; \\ 0 & \text{при } P \notin U_\alpha. \end{cases}$$

При этом выполняется $g_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(P)$ при $P \in U_\alpha^\varepsilon$. Таким образом, $m \cdot L$ функций g_α^k задают C^∞-отображение

$$g : M \to \mathbf{R}^{m \cdot L}.$$

Определим теперь

$$\varphi : M \to \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{m\cdot L + L}, \qquad \varphi(P) := (\underbrace{\ g(P)\ }_{m\cdot L \text{ функций}}; \underbrace{f_\alpha(\varphi_\alpha(P))}_{L \text{ функций}}).$$

Тогда $\operatorname{rk}\varphi \geq \operatorname{rk} g$. Если $P \in U_\alpha^\varepsilon$, то

$$\operatorname{rk} g|_P \geq \operatorname{rk} \left(\frac{\partial g_\alpha^k(P)}{\partial x_\alpha^j}\right) \geq \operatorname{rk} \left(\frac{\partial x_\alpha^k(P)}{\partial x_\alpha^j}\right) = m.$$

Поскольку по соображениям размерности $\operatorname{rk}\varphi \leq m$, то $\operatorname{rk}\varphi \equiv m$. Мы показали, что φ — погружение.

Теперь докажем, что φ инъективно, т. е. является биекцией на образ. Пусть $P \neq Q$. Тогда найдется такой номер α, что $P \in U_\alpha^\varepsilon$ и, следовательно, $f_\alpha(\varphi_\alpha(P)) = 1$. Если при этом $f_\alpha(\varphi_\alpha(Q)) < 1$, то все доказано, если же $f_\alpha(\varphi_\alpha(Q)) = 1$, то $Q \in U_\alpha$, так что $g_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(P)$, $g_\alpha^k(Q) = x_\alpha^k(Q)$. Поскольку $P \neq Q$, то найдется координата $x_\alpha^{k_0}(P) \neq x_\alpha^{k_0}(Q)$, так что $g_\alpha^{k_0}(P) \neq g_\alpha^{k_0}(Q)$ и $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Так как M компактно, а $\varphi(M) \subset \mathbf{R}^N$ хаусдорфово, то по задаче 2.39 φ является гомеоморфизмом на образ и, следовательно, вложением в сильном смысле. □

Теорема 2.41. (Сильная теорема Уитни) *(без доказательства) В предыдущей теореме можно взять $p = 2 \cdot \dim M + 1$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы стартовав от какого-либо вложения, путем проектирования на линейные подпространства меньшей размерности, понизить разиерность. Соответствующие подпространства найдутся по лемме Сарда. □

3. Касательное расслоение

Определение 3.1. Пусть $\dim M = m$. Определим $N = T_* M$ – *многообразие линейных элементов* или *касательное расслоение* M. N как множество состоит из пар (P, ξ), где $P \in M$, а $\xi \in T_P M$, т. е. касательный вектор. Топология и структура многообразия задается при помощи биективных отображений некоторых подмножеств N на открытые подмножества $\mathbf{R}^{2m}$, которые объявляются гомеоморфизмами и картами (так что $\dim N = 2m$). Именно, если (U, φ) – локальная карта на M, то в качестве указанного подмножества N берется множество пар (P, ξ) с $P \in U$, а в качестве отображения в $\mathbf{R}^{2m}$ следующее отображение Φ:

$$\Phi(P, \xi) = (x^1, \ldots, x^m; \, \xi^1, \ldots, \xi^m),$$

где

$$\varphi(P) = (x^1, \ldots, x^m), \quad \xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m},$$

т. е. ξ как касательный вектор сопоставляет системе координат $(x^1, \ldots, x^m)$ набор ξ^i. Тогда замены переменных при переходе от одной такой карты к другой осуществляются по первой группе переменных так, как было на M, а по второй – при помощи матрицы Якоби замены первой группы. В частности, они гладкие.

Замечание 3.2. Если M было многообразием гладкости C^k, то $T_* M$ — многообразие класса C^{k-1}.

4. Многообразия с краем

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R}^n_+ \subset \mathbf{R}^n, \qquad \mathbf{R}^n_+ := \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^n \geq 0\},$$

$$\mathbf{R}^{n-1}_0 := \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n \mid x^n = 0\}.$$

Под дифференцируемостью непрерывной функции $f : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}^1$ мы будем понимать следующее. Для внутренних точек ($x^n > 0$) сохраним обычное понятие. Для граничных точек ($\vec{x}_0 \in \mathbf{R}^{n-1}_0$) мы будем требовать справедливости разложения

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x^i - x^i_0) + o(\vec{x} - \vec{x}_0), \qquad \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{x}_0 \\ x^n \geq 0}} \frac{o(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Тогда $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, а

$$f_n = \lim_{h \to +0} \frac{f(x^1_0, \ldots, x^{n-1}_0, x^n_0 + h) - f(x^1_0, \ldots, x^{n-1}_0, x^n_0)}{h} \tag{1}$$

(односторонняя частная производная).

Определение 4.1. Сепарабельное хаусдорфово топологическое пространство M называется *многообразием с краем,* если существует такое его открытое покрытие

$\{U_\alpha\}$ и координатные гомеоморфизмы $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbf{R}^n_+$, где $V_\alpha \subset \mathbf{R}^n_+$ — открытые, а функции замены координат

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : V_{\alpha\beta} = \varphi_a(U_\alpha \cap U_\beta) \to V_{\beta\alpha} = \varphi_b(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются гладкими в указанном смысле.

Назовем точку $P \in M$ *внутренней*, если $x^n_\alpha(P) > 0$ и *граничной*, если $x^n_\alpha(P) = 0$.

Лемма 4.2. *Определение граничных и внутренних точек не зависит от выбора локальной системы кординат.*

Доказательство. Допустим противное: в окрестности $P \in M$ индуцированы две локальные системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(y^1, \ldots, y^n)$ из $\mathbf{R}^n_{+,x}$ и $\mathbf{R}^n_{+,y}$, причем $x^n(P) > 0$, а $y^n(P) = 0$. Таким образом, на самом деле $(x^1, \ldots, x^n)$ осуществляют гомеоморфизм окрестности $U \ni P$ на открытое $V \subset \mathbf{R}^n_x$, а $(y^1, \ldots, y^n)$ — на $\tilde{V} \subset \mathbf{R}^n_{+,y}$ (переходя к пересечению, считаем оба гомеоморфизма заданными на одной окрестности). Возникает функция перехода, т. е. гладкий гомеоморфизм $\varphi : V \to \tilde{V}$, $y^k = \varphi^k(x^1, \ldots, x^n)$, причем

1) $y^n = \varphi^n(x^1, \ldots, x^n) \geq 0$,

2) $y^n(P) = \varphi^n(x^1_0, \ldots, x^n_0) = 0$,

т. е. $y^n = \varphi^n$ достиает минимума в точке $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$. Так как V открыто в $\mathbf{R}^n_{+,x}$, то $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ — внутренняя, должны быть выполнены условия локального экстремума:

$$\left.\frac{\partial \varphi^n}{\partial x^i}\right|_{(x^1_0, \ldots, x^n_0)} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Но тогда $\det \left\| \left.\frac{\partial \varphi^n}{\partial x^i}\right|_{(x^1_0, \ldots, x^n_0)} \right\| = 0$ и не существует гладкого обратного, поскольку для определения односторонней частной производной (1) продолжает работать правило дифференцирования (умножение матриц Якоби). □

Определение 4.3. Назовем *краем* или *границей* ∂M многообразия с краем M множество его граничных точек.

Теорема 4.4. *Край является многообразием на единицу меньшей размерности.*

Доказательство. В качестве атласа возьмем ограничения карт на край. □

Задача 4.5. Проверить выполнение всех условий.

Теорема 4.6. *Край ∂M ориентируемого многообразия M является ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Пусть атлас $\{U_\alpha, (x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)\}$ на M $(x^n_\alpha \geq 0)$ является ориентирующим, $\det \left\| \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \right\|^n_{i,j=1} > 0$. На ∂M возьмем атлас $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$ с локальными координатами $(x^1_\alpha, \ldots, x^{n-1}_\alpha)$. Покажем, что он является ориентирующим, т. е. для любой $P \in W_\alpha \cap W_\beta$ выполняется $\det \left\| \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \right\|_{i,j=1}^{n-1} > 0$. Поскольку на $W_\alpha \cap W_\beta$ имеем $x^n_\alpha = x^n_\beta \equiv 0$, то $\frac{\partial x^n_\alpha}{\partial x^i_\beta} \equiv 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Таким образом, в точке P

$$0 < \det \left\| \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \right\|_{i,j=1}^{n} = \det \left\| \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \right\|_{i,j=1}^{n-1} \cdot \frac{\partial x^n_\alpha}{\partial x^n_\beta}. \tag{2}$$

В точке P

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^n_\alpha}{\partial x^n_\beta} &= \lim_{h \to +0} \frac{x^n_\alpha(x^1_\beta(P), \dots, x^n_\beta(P) + h) - x^n_\alpha(x^1_\beta(P), \dots, x^n_\beta(P))}{h} = \\
&= \lim_{h \to +0} \frac{x^n_\alpha(x^1_\beta(P), \dots, x^n_\beta(P) + h)}{h}.
\end{aligned}$$

Поскольку допредельное выражение положительно, то предел неотрицателен, а поскольку, в силу (2), он ненулевой, то он положителен: $\left. \frac{\partial x^n_\alpha}{\partial x^n_\beta} \right|_P > 0$. Тогда из (2) получаем, что $\det \left\| \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \right\|_{i,j=1}^{n-1} > 0$. $\square$

Пример 4.7. Обратное неверно: лента Мебиуса неориентируема, а ее край S^1 ориентируем.

5. Риманова метрика

Определение 5.1. *Римановой метрикой* на многообразии M называется соответствие g, которое каждой локальной системе координат $(x^1_\alpha, \dots, x^m_\alpha)$ в U_α сопоставляет набор гладких функций $g^\alpha_{ij} : U \to \mathbf{R}$, причем

1) в каждой точке $x \in U$ матрица $\|g_{ij}\|$ — симметрическая (невырожденная) положительно определенная;

2) выполняется тензорный закон: функции g^β_{kl}, отвечающие системе координат $(x^1_\beta, \dots, x^m_\beta)$, удовлетворяют в каждой точке из пересечения координатных окрестностей
$$g^\beta_{kl} = g^\alpha_{ij} \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^k_\beta} \frac{\partial x^j_\alpha}{\partial x^l_\beta}$$
(по повторяющимся индексам — суммирование).

Пара (M, g) называется *римановым многообразием.*

Задача 5.2. Первое условие достаточно проверить для каждой точки $P \in M$ только в одной карте.

Определение 5.3. При работе с тензорами нам удобно ввести следующие соглашения об обозначениях. Мы будем обозначать локальные системы координат (U, φ), (U', φ'), (U'', φ'') и т. д., а соответствующие координаты — $(x^1, \dots, x^m)$, $(x^{1'}, \dots, x^{m'})$, $(x^{1''}, \dots, x^{m''})$ и т. д. Таким образом, можно сказать, что $x^{i'}$ это на самом деле $x'^{i'}$.

Кроме того, по индексам, повторяющимся вверху и внизу, будет подразумеваться суммирование. В этих обозначениях тензорные законы преобразования для координат вектора и римановой метрики примут вид:

$$\xi^{i'} = \xi^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad g_{i'j'} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Лемма 5.4. *Риманова метрика задает скалярное произведение касательных векторов $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in T_P M$ по формуле*

$$\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle := g(\vec{\xi}, \vec{\eta}) := g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

Доказательство. Все ясно кроме инвариантности: $g_{ij}\xi^i\eta^j = g_{i'j'}\xi^{i'}\eta^{j'}$, которая проверяется непосредственно по определению римановой метрики и первому определению касательного вектора. □

Задача 5.5. Провести эту выкладку.

Определение 5.6. *Билинейной формой* назовем риманову метрику без условия 1).

Определение 5.7. Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение, g — билинейная форма на (касательных векторах к) M. Определим значение ее *обратного образа* f^*g на векторах $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in T_P N$ формулой

$$(f^*g)(\vec{\xi}, \vec{\eta}) := g((df_P)\vec{\xi}, (df_P)\vec{\eta}).$$

В координатах можно определить обратный образ следующим путем. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты в окрестности P, $(y^1, \dots, y^m)$ — в окрестности $f(P)$, а $(f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^m(x^1, \dots, x^n))$ — соответствующая координатная запись f. Тогда (в координатах $(x^1, \dots, x^n)$)

$$(f^*g)_{ij} := g_{kl} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial f^l}{\partial x^j}.$$

Задача 5.8. Проверить согласованность этих двух определений.

Задача 5.9. Доказать, что если $i : N \to M$ — погружение (в частности, вложение), а g — риманова метрика на M, то i^*g — риманова метрика на N. Почему это не так для произвольного отображения ?

Определение 5.10. Пусть $i : N \hookrightarrow M$ — включение подмногообразия N в риманово многообразие (M, g). Тогда i^*g называется *индуцированной* римановой метрикой на подмногообразии N.

Теорема 5.11. *На всяком компактном многообразии M существует риманова метрика.*

Доказательство. Пусть $F : M \to \mathbf{R}^p$ — вложение из теоремы Уитни. Тогда $F^*g_{\mathbf{R}^p}$ — риманова метрика на M. □

Задача 5.12. Доказать эту теорему с помощью разбиения единицы (без теоремы Уитни).

6. Тензоры: первые определения и свойства

Определение 6.1. *Тензорным полем* типа (p,q) ранга $p+q$ на многообразии M размерности n называется соответствие, сопоставляющее каждой системе координат $(x)=(x^1,\dots,x^n)$ систему n^{p+q} гладких функций $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, называемых *компонентами,* причем для любых систем координат (x) и (x') (с общей областью) соответствующие компоненты связаны тензорным законом

$$T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}=T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\cdot\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}}.$$

Задача 6.2. Показать, что тензор типа $(1,1)$, инвариантный относительно ортогональных замен координат, пропорционален тензору δ^i_j.

Задача 6.3. Показать, что тензор третьей валентности, инвариантный относительно произвольных замен координат, равен нулю.

Задача 6.4. Найти общий вид тензора четвертой валентности, инвариантного относительно произвольной замены координат.

Задача 6.5. Выразить след матрицы в виде результата тензорных операций.

Задача 6.6. Выразить детерминант матрицы в виде результата тензорных операций.

Задача 6.7. Доказать с помощью тензорных формул правило вычисления детерминанта произведения матриц:

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B.$$

Задача 6.8. Выразить коэффициенты многочлена $\det(A-\lambda E)$ в виде результата тензорных операций .

Задача 6.9. Доказать, что величины C^i_i, $C^i_jC^j_i$, $C^i_jC^j_kC^k_i$, выражаются через коэффициенты многочлена $\det(C-\lambda E)$.

Задача 6.10. Найти валентность тензора, компоненты которого суть коэффициенты

1) векторного произведения,

2) смешанного произведения

векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

Задача 6.11. Пусть X имеет валентность $(1,0)$, W – $(0,1)$. Найти ранг оператора $X\otimes W$.

Определение 6.12. Тензорное поле типа $(0,1)$ называется *ковекторным.*

Согласно задаче выше $dx^i=\operatorname{grad}x^i$ является ковектором.

Задача 6.13. В точке ковекторы являются функционалами на векторах.

Задача 6.14. Базисы $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ в T_PM и $\{dx^j\}$ в T^*_PM двойственны.

Рассмотрим $C^\infty(M)$-линейное отображение $L(v_1,\dots,v_q;a^1,\dots,a^p)$ зависящее от q векторных и p ковекторных полей, и принимающее значения в $C^\infty(M)$. Рассмотрим соответствия

$$T\mapsto L_T,\qquad L_T(v_1,\dots,v_q;a^1,\dots,a^p):=T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}v_1^{j_1}\dots v_q^{j_q}\cdot a^1_{i_1}\dots a^p_{i_p},$$

и

$$L \mapsto T_L, \qquad T_L : (x^1, \ldots, x^n) \rightsquigarrow (T_L)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} := L(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_q}};\ dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}).$$

Задача 6.15.

1) L_T полилинеен и не зависит от выбора системы координат.

2) T_L действительно удовлетворяет (p, q)-тензорному закону.

3) Эти отображения взаимно обратны.

Определение 6.16. Пусть даны два тензорных поля типа (p, q): T и S. Определим тензорное поле $T + S$, называемое *суммой* T и S, полагая

$$(T + S)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} := T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Лемма 6.17. *Это действительно тензор типа* (p, q).

Доказательство. *1 способ.* Надо проверить тензорный закон.
Задача 6.18. Проделайте выкладку.

2 способ. Сумма двух полилинейных отображений $L_T + L_S$ является полилинейным отображением того же типа, равным L_{T+S}. □

Определение 6.19. Если $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — тензорное поле на M, а $f \in C^\infty(M)$, то, очевидно, тензорным полем является *произведение* функции на тензор $f \cdot T$: $(x^1, \ldots, x^n) \rightsquigarrow f \cdot T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Определение 6.20. Поле S типа (p, q) получено из поля T типа (p, q) *перестановкой верхних* (нижних — аналогично) *индексов* с номерами a и b, если $S^{i_1 \ldots i_a \ldots i_b \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_b \ldots i_a \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Доказательство того, что получено тензорное поле, очевидно, если мы рассмотрим соответствующие полилинейные отображения.

Задача 6.21. Показать на примере, что перестановка верхнего и нижнего индекса не является тензорной операцией. Рассмотреть случай тензора типа $(1, 1)$ (линейного оператора). Получить в частности, что понятие симметричности оператора $C^i_j = C^j_i$ зависит от системы координат.

Определение 6.22. *Сверткой тензора* T типа (p, q) по верхнему индексу с номером a и нижнему индексу с номером b называется тензор S типа $(p - 1, q - 1)$, определяемый

$$S^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} := \sum_i T^{i_1 \ldots i_{a-1} i i_a \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{b-1} i j_b \ldots j_{q-1}}.$$

Это действительно тензорное поле типа $(p - 1, q - 1)$, поскольку

$$L_S(v_1, \ldots, v_{q-1}; a^1, \ldots, a^{p-1}) =$$

$$= \sum_i L_T(v_1, \ldots, v_{a-1}, \frac{\partial}{\partial x^i}, v_a, \ldots, v_{q-1}; a^1, \ldots, a^b, dx^i, a^{b+1}, \ldots, a^{p-1}),$$

а
$$\sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = 1,$$
так что правая часть не зависит от выбора системы координат.

Пример 6.23. Свертка C_i^i тензора типа $(1,1)$ — след линейного оператора.

Определение 6.24. *Тензорным произведением* $T\otimes S$ двух тензорных полей T типа (p,q) и S типа (r,t) называется тензорное поле типа $(p+r, q+t)$, задаваемое формулой

$$(T\otimes S)^{i_1,\dots,i_{p+r}}_{j_1,\dots,j_{q+t}} := T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\cdot S^{i_{p+1},\dots,i_{p+r}}_{j_{q+1},\dots,j_{q+t}}.$$

Соответствующее $L_{T\otimes S}$ есть просто произведение полилинейных отображений, а следовательно — полилинейное отображение соответствующих аргументов. Таким образом, $T\otimes S$ действительно тензорное поле.

Определение 6.25. Пусть b_{ij} — невырожденное тензорное поле типа $(0,2)$. Под невырожденностью понимается условие $\det\|b_{ij}\|\neq 0$.

Задача 6.26. Проверить независимость этого условия от выбора системы координат.

Задача 6.27. Доказать, что компоненты обратной матрицы b^{jk}, т. е. удовлетворяющей условию $b^{jk}b_{ki} = \delta^j_i$, образуют тензор типа $(2,0)$.

Определение 6.28. Операция *поднятия индекса* у тензора T типа (p,q) при помощи b есть композиция операций тензорного произведения с b^{ij} и свертки. Получаем тензор S типа $(p+1, q-1)$ Например, для первого индекса:

$$S^{i_1\dots i_{p+1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}} := b^{i_1 i} T^{i_2\dots i_{p+1}}_{i\, j_1,\dots,j_{q-1}}.$$

Аналогично, опускание индекса:

$$S^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q+1}} := b_{j_1 i} T^{i\, i_1\dots i_{p-1}}_{j_2,\dots,j_{q+1}}.$$

Определение 6.29. Определим *симметрирование* тензорного поля T типа $(0,q)$ как
$$\mathrm{Sym}\,(T)_{j_1,\dots,j_q} = T_{(j_1,\dots,j_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}},$$
а *альтернирование*

$$\mathrm{Alt}\,(T)_{j_1,\dots,j_q} = T_{[j_1,\dots,j_q]} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} (-1)^\sigma\, T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}.$$

Очевидно, что это тензорные операции. Полученное при симметрировании (соотв., альтернировании) поле является *симметрическим* (соотв., *кососимметрическим*) в том смысле, что их компоненты не меняются при перестановке двух индексов (соотв., меняют знак при перестановке двух соседних индексов).

Задача 6.30. Докажите, что альтернирование является линейным отображением, осуществляющим проектирование на кососимметричесие тензоры, а симметрические лежат в его ядре.

Лемма 6.31. *Кососимметрическое тензорное поле $T_{i_1\dots i_n}$ на M, $\dim M = n$ (т. е. поле максимальной валентности) определяется только одной своей (существенной) компонентой $T_{12\dots n}$. Остальные отличаются от нее знаком ± 1, точнее,*

$$T_{i_1\dots i_n} = T_{\sigma(12\dots n)} = (-1)^\sigma T_{12\dots n}.$$

Существенная компонента T в данной точке относительно другой системы координат получается домножением на определитель матрицы Якоби замены.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Далее,

$$T_{1'\dots n'} = T_{i_1\dots i_n} \cdot \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} = \left(\sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial x^{\sigma(1)}}{\partial x^{1'}} \dots \frac{\partial x^{\sigma(n)}}{\partial x^{n'}}\right) T_{i_1\dots i_n} = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right\| \cdot T_{12\dots n}.$$

Лемма доказана. $\square$

Определение 6.32. Определим *внешнее произведение* $R = T \wedge P$ двух кососимметрических тензоров $T_{i_1\dots i_k}$ и $P_{i_1\dots i_q}$ формулой

$$R_{i_1\dots i_{k+q}} = T_{[i_1\dots i_k} P_{i_{k+1}\dots i_{k+q}]} = \frac{1}{k!\,q!} \sum_{\sigma \in S_{k+q}} (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\dots i_k} P_{i_{k+1}\dots i_{k+q})}.$$

С точностью до множителя, это композиция тензорного произведения и альтернирования.

Для работы с кососимметрическими тензорами типа $(0, q)$ используется также язык дифференциальных форм. Точнее, по определению внешнего умножения,

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma dx^{\sigma(i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q)}.$$

Тогда разложение тензора по базису из произведений примет вид:

$$T = T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q} = \sum_{i_1 < \dots < i_q} T_{i_1\dots i_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

Это и называется записью в виде дифференциальной формы. Таким образом, в силу базисности (задача из списка) эти разложения однозначны.

Задача 6.33. Покажите, что для получения формулы внешнего умножения на языке дифференциальных форм достаточно перемножить выражения, а затем, путем перестановок (с учетом знаков) упорядочить дифференциалы.

Задача 6.34. (следствие из леммы 6.31) Выражение $\sqrt{\det \|g_{ij}\|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ является тензором относительно замен координат с положительным якобианом. Здесь g_{ij} — риманова метрика.

Это выражение называется *формой объема*. Позже мы определим интеграл и сможем вычислять объем риманова многообразия.

7. Ковариантное дифференцирование

Задача 7.1. Покажите, что обычное частное дифференцирование компонент тензорного поля в $\mathbf{R}^n$ не является тензорной операцией.

Хотим определить на тензорных полях в $\mathbf{R}^n$ тензорную операцию $(p,q) \rightsquigarrow (p,q+1)$, которая совпадает в декартовых координатах с частным дифференцированием.

Для этого надо прежде всего попытаться записать результат частного дифференцирования в других координатах.

Обсудим сначала случай векторного поля T^i. Пусть x^i — декартова система координат в $\mathbf{R}^n$, а $x^{i'}$ — некоторая криволинейная система координат. Тогда для искомой операции ∇ должно быть

$$(\nabla T)^i_j = \frac{\partial T^i}{\partial x^j}, \qquad (\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial xi}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)^i_j.$$

Тогда

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial xi}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}T^{k'}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial xi}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial xi}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T^{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) =$$

$$= \delta^{i'}_{k'}\,\delta^{m'}_{j'}\frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{m'}} + T^{k'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}},$$

таким образом,

$$(\nabla T)^{i'}_{j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'}\Gamma^{i'}_{j'k'}, \qquad \Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Для ковекторного поля T_i должно быть $(\nabla T)_{ij} = \frac{\partial T_i}{dx^j}$, а $(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(\nabla T)_{ij}$. Тогда

$$(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}T_{k'}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T_{k'}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \delta^{k'}_{i'}\,\delta^{m'}_{j'}\frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{m'}} + T_{k'}\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

или

$$(\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} + T_{k'}\bar\Gamma^{k'}_{i'j'}, \qquad \bar\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Лемма 7.2. *Имеем* $\bar\Gamma^{k'}_{i'j'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'}$.

Доказательство. Продифференцируем тождество $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}\cdot\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = \delta^{i'}_{k'}$ по $x^{m'}$:

$$0 = \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}}\cdot\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{m''}\partial x^{i''}}\cdot\frac{\partial x^{m''}}{\partial x^{m'}} = \Gamma^{i'}_{m'k'} + \bar\Gamma^{i'}_{m'k'}. \qquad \square$$

Теорема 7.3. *На $M = \mathbf{R}^n$ определена тензорная операция ∇, действующее на поле $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ по формуле*

$$(\nabla T)^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q;m'} = \frac{\partial}{\partial x^{m'}}(T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}) + \sum_{s=1}^{p} T^{i'_1\dots i'_{s-1}r'i'_{s+1}\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}\Gamma^{i'_s}_{r'm'} - \sum_{s=1}^{q} T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_{s-1}r'j'_{s+1}\dots j'_q}\Gamma^{r'}_{j'_s m'},$$

а функции Γ преобразуются по правилу

$$\Gamma^{i''}_{j''k''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\Gamma^{i'}_{j'k'} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''}\partial x^{k''}}.$$

Доказательство. Явный вид ∇ устанавливается аналогично выкладкам для векторных и ковекторных полей.

Задача 7.4. Проделайте эту выкладку.

Найдем закон преобразования Γ.

$$\nabla_{k'}T^{i'} := (\nabla T)^{i'}_{k'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{r'}\Gamma^{i'}_{r'k'},$$

$$\nabla_{k''}T^{i''} = \frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{k''}} + T^{r''}\Gamma^{i''}_{r''k''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}T^{i'}\right) + \frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}T^{r'}\Gamma^{i''}_{r''k''} =$$

$$= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{i'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{i'}} + T^{r'}\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\Gamma^{i''}_{r''k''}.$$

С другой стороны,

$$\nabla_{k''}T^{i''} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\nabla_{k'}T^{i'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{r'}\Gamma^{i'}_{r'k'}\right).$$

Поэтому

$$T^{r'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\Gamma^{i'}_{r'k'} = T^{r'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{r'}} + T^{r'}\frac{\partial x^{r''}}{\partial x^{r'}}\Gamma^{i''}_{r''k''}.$$

В силу произвольности поля T^i получаем

$$\Gamma^{i''}_{r''k''} = \Gamma^{i'}_{r'k'}\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{r'}}.$$

Как показано при доказательстве леммы 7.2,

$$-\quad \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^{r''}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}}\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'}\partial x^{r'}} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{r''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{r''}\partial x^{k''}}\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}. \qquad \square$$

Определение 7.5. На гладком многообразии M задана *операция ковариантного дифференцирования* (или *аффинная связность*) ∇, если для каждой карты задан набор гладких функций Γ^i_{jk}, преобразующихся при замене координат по формуле

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\Gamma^{i}_{jk} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Тогда действие ∇ задается

$$(\nabla T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q;m} = \frac{\partial}{\partial x^m}(T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}) + \sum_{s=1}^{p} T^{i_1\dots i_{s-1} r i_{s+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\Gamma^{i_s}_{rm} - \sum_{s=1}^{q} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{s-1} r j_{s+1}\dots j_q}\Gamma^{r}_{j_s m},$$

Замечание 7.6. Как показывают проведенные выкладки, рассматриваемые "в обратную сторону", ∇ является тензорной операцией.
Замечание 7.7. Существование связностей будет следовать из теоремы существования римановой связности.
Определение 7.8. *Тензором кручения* связности Γ^i_{jk} называется тензор, задаваемый в каждой системе координат равенством $\Omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$.

Лемма 7.9. *Ω действительно является тензорным полем типа $(1,2)$.*

Задача 7.10. Проверить.
Определение 7.11. Связность Γ называется *симметричной*, если $\Omega = 0$.

Лемма 7.12. *Связность ∇ обладает свойствами*

1) *операция ∇ линейна;*

2) *операция ∇ тензорная;*

3) *ковариантная производная функции (тензора нулевого ранга) совпадает с градиентом: $\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k}$;*

4) *операция ∇ на векторных и ковекторных полях имеет вид*

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^j \Gamma^i_{jk},$$

$$\nabla_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_j \Gamma^j_{ik};$$

5) *для произвольных тензорных полей T и S выполняется формула Лейбница*

$$\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S).$$

Доказательство. Свойства очевидны, кроме (5). Проверим его, например для векторных полей.

$$\begin{aligned}
\nabla_k(T^i S^j) &= \frac{\partial}{\partial x^k}(T^i S^j) + T^r S^j \Gamma^i_{rk} + T^i S^r \Gamma^j_{rk} = \\
&= (\frac{\partial}{\partial x^k} T^i) S^j + T^i \frac{\partial}{\partial x^k}(S^j) + T^r S^j \Gamma^i_{rk} + T^i S^r \Gamma^j_{rk} = \\
&= (\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^r \Gamma^i_{rk}) S^j + T^i (\frac{\partial S^j}{\partial x^k} + P^r \Gamma^j_{rk}) = \\
&= (\nabla_k T^i) S^j + T^i (\nabla_k S^j). \qquad \square
\end{aligned}$$

Задача 7.13. Проделать эту выкладку для произвольных полей.

Теорема 7.14. *Свойства (1 – 5) однозначно задают ковариантное дифференцирование. Точнее, найдутся единственным образом функции Γ^i_{jk}, удовлетворяющие закону изменения из определения связности, а действие ∇ на произвольном поле будет задаваться формулой из того же определения.*

Доказательство. Обозначим $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $e^j = dx^j$. Тогда функции Γ^i_{jk} должны однозначно определяться из формул

$$\nabla_k e_i = \Gamma^j_{ik} e_j, \qquad \nabla_k e^i = -\Gamma^i_{jk} e^j. \tag{3}$$

Формулы не противоречат друг другу, так как из свойств (1 – 5) получаем, что

$$\nabla_k(T^i T_i) = (\nabla_k T^i) T_i + T^i (\nabla_k T_i) =$$
$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} T^j\right) T_i + \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \tilde{\Gamma}^j_{ik} T_j\right) T^i =$$
$$= \nabla_k (T^i T_i) + \underbrace{\Gamma^i_{jk} T^j T_i - \tilde{\Gamma}^j_{ik} T_j T^i}_{0},$$

и в силу произвольности полей $\Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^j_{ik} = 0$.

Заметим, что при выводе закона изменения Γ^i_{jk} в теореме 7.3 мы пользовались только соотношением вида из п. 4, так что дословное повторение этой выкладки дает искомый закон изменения.

Осталось вывести формулу для дифференцирования произвольных полей. Рассмотрим случай поля типа $(1,1)$. Пусть локально

$$T = T^i_j \, e_i \otimes e^j.$$

Тогда

$$\nabla_k T^l_m = (\nabla T)^l_{m;k} = (\nabla T^i_j \, e_i \otimes e^j)^l_{m;k} =$$
$$= \Big((\nabla T^i_j) \otimes e_i \otimes e^j + T^i_j (\nabla e_i) \otimes e^j + T^i_j e_i \otimes (\nabla e^j)\Big)^l_{m;k} =$$
$$= \frac{\partial T^l_m}{\partial x^k} + \Big(T^i_j (\Gamma^r_{ki} e_r) \otimes e^j\Big)^l_m + \Big(T^i_j e_i \otimes (\Gamma^j_{rk} e^r)\Big)^l_m =$$
$$= \frac{\partial T^l_m}{\partial x^k} + T^l_r \Gamma^r_{km} + T^l_j \Gamma^j_{mk}. \qquad \square$$

Задача 7.15. Провести выкладку в общем случае.

Определение 7.16. Аффинная симметричная связность ∇ на римановом многообразии (M,g) называется *римановой* (или *согласованной с метрикой*) если $\nabla g = 0$.

Задача 7.17. В этом случае ∇ коммутирует с операциями поднятия и опускания индексов.

Теорема 7.18. *На римановом многообразии (M,g) существует, причем единственная, риманова связность. При этом ее коэффициенты (символы Кристоффеля) равны*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Покажем, что символы Кристоффеля римановой связности обязаны удовлетворять (4). Тем самым будет доказана единственность. По определению,

$$0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{rj}\Gamma^r_{ik} - g_{ir}\Gamma^r_{jk}.$$

Опустив индекс $\Gamma_{ijk} := g_{ir}\Gamma^r_{jk}$ и циклически переставляя индексы, получим

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk},$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij},$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki}.$$

Сложим первые два равенства и вычтем из них третье. Получим, с учетом симметрии $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij} - \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} =$$

$$= \Gamma_{jki} + \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} - \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} = 2\Gamma_{ijk} = 2g_{ir}\Gamma^r_{jk}$$

и, умножая на обратную матрицу к g_{ij},

$$\Gamma^r_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right).$$

Для доказательства существования достаточно определить коэффициенты связности с помощью формул (4) (проверьте закон изменения !). □

Определение 7.19. Система координат *евклидова с точки зрения метрики,* если g_{ij} в ней постоянны (и следовательно, заменой координат приводятся к δ_{ij}).

Система координат *евклидова с точки зрения связности,* если в ней $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$.

Задача 7.20. Доказать эквивалентность этих требований.

8. Параллельное перенесение и геодезические

Параллельное перенесение — способ сравнения касательных векторов в разных точках. На плоскости — "постоянство координат", т. е. равенство нулю их частных производных. Естественно в общем случае потребовать равенство нулю ковариантной производной. Это слишком жесткое требование. Приходится осуществлять перенос, т. е. требовать ковариантного постоянства компонент поля "вдоль кривой". При этом результат, вообще говоря, зависит от кривой, даже если концы общие. Перейдем к точным определениям.

Пусть на многообразии M задана аффинная связность ∇. Пусть точки P и Q на M соединены гладкой кривой $\gamma : [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$. На кривой возникает векторное поле скоростей ξ (вспомним третье определение касательного вектора).

Определение 8.1. *Ковариантной производной тензорного поля T типа (p,q) вдоль кривой γ* называется тензорное поле $\nabla_{\dot\gamma}(T)$, определяемое как свертка тезорного произведения касательного поля с ковариантной производной T:

$$(\nabla_{\dot\gamma}(T))^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} := \xi^k \nabla_k T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}.$$

Определение 8.2. Векторное поле T называется *параллельным вдоль γ относительно ∇,* если $\nabla_{\dot\gamma}(T) \equiv 0$.

Запишем эти уравнения в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$. Если

$$\gamma(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t)), \qquad \xi^k = \frac{dx^k(t)}{dt},$$

то уравнения примут вид

$$\xi^k \nabla_k T^i = \frac{dx^k(t)}{dt}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^r \Gamma^i_{rk}\right) = 0,$$

$$\frac{dx^k(t)}{dt}\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^r\Gamma^i_{rk}\frac{dx^k(t)}{dt} = \frac{dT^i}{dt} + T^r\Gamma^i_{rk}\frac{dx^k(t)}{dt} = 0.$$

Определение 8.3. Последнее равенство называется *уравнением параллельного перенесения вектора вдоль кривой.*

Задача параллельного перенесения выглядит следующим образом. Задана гладкая кривая γ, соединяющая точки P и Q на многообразии M со связностью ∇, и вектор $v \in T_P M$. Надо найти такой вектор $w \in T_Q M$, что имеется ковариантно постоянное векторное поле $V(t)$, причем $V(0) = v$ и $V(1) = w$. Поскольку задачу можно решать последовательно для последовательных кусков γ, каждый из которых лежит в пределах действия одной системы координат, то можно считать, что кривая лежит в одной координатной окрестности.

Возникает задача решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $V^i(t)$ с начальным значением $V^i(0) = v^i$, разрешенной относительно производных. Как известно, решение такой системы существует, единственно и продолжается до Q, т. е. $t = 1$.

Соответственно, вектор $w = V(1) \in T_Q M$ называется *параллельным $v \in T_P M$ вдоль γ.*

Лемма 8.4. *Пусть (M,g) — риманово многообразие. Симметрическая аффинная связность ∇ на M является римановой тогда и только тогда, когда соответствующее параллельное перенесение сохраняет скалярное произведение векторов по отношению к g.*

Доказательство. Пусть ∇ — риманова, $\langle .,. \rangle$ — скалярное произведение, порожденное g, $V(t)$ и $W(t)$ — векторные поля, удовлетворяющие уравнению параллельного перенесения вдоль $\gamma : [0,1] \to M$. Надо показать, что $\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle \equiv 0$.

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle = \nabla_{\dot\gamma}\langle V(t), W(t)\rangle = \xi^k \nabla_k \left(g_{ij} V^i W^j\right) =$$

$$= \xi^k(\nabla_k g_{ij})V^i W^j + \xi^k g_{ij}(\nabla_k V^i)W^j + \xi^k g_{ij}V^i(\nabla_k W^j) =$$
$$= \xi^k \cdot 0 \cdot V^i W^j + g_{ij}(\nabla_{\dot\gamma} V^i)W^j + g_{ij}V^i(\nabla_{\dot\gamma} W^j) = 0.$$

Обратно, если это соотношение выполнено для параллельных полей вдоль кривой, то для произвольных векторов ξ, V и W выполняется $\xi^k V^i W^j \nabla_k g_{ij} = 0$ откуда (беря базисные вектора) $\nabla_k g_{ij} = 0$. $\square$

Замечание 8.5. Параллельное перенесение можно определить для кусочно–гладких кривых как композицию перенесений по гладким фрагментам.

Определение 8.6. Кривая γ на многообразии M с аффинной связностью ∇ называется *геодезической,* если векторное поле ее скоростей параллельно вдоль этой кривой: $\nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma) = 0$.

В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ получаем уравнения

$$\frac{dx^k}{dt}\left(\nabla_k \xi^i\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$. Отсюда

$$\frac{dx^k}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\xi^i + \Gamma^i_{rk}\xi^r\right) = 0,$$

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{rk}\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Лемма 8.7. *Пусть $P \in M$, $v \in T_P M$. Тогда существует и притом единственная геодезическая $\gamma(t)$, удовлетворяющая условиям $\gamma(0) = P$ и $\dot\gamma(t) = v$. При этом решение гладко зависит от начальных данных.*

Доказательство. После записи в локальных координатах в окрестности точки P задача нахождения геодезической сводится к решению системы n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с начальными условиями на значения решения и на значения его производной в 0, разрешенная относительно старших производных. Как известно, такое решение локально существует, единственно и гладко зависит от начальных данных. $\square$

Задача 8.8. Если две геодезические соприкасаются в некоторой точке, то они совпадают.

Задача 8.9. При параллельном перенесении вектора вдоль геодезической римановой связности угол между ним и касательным вектором остается постоянным.

Лемма 8.10. (геометрический смысл символов Кристоффеля) *Для базисных векторных полей $e_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ данной системы координат выполнено $\nabla_{e_i}(e_j) = \Gamma^r_{ji} e_r$ (разложение вектора по базису). Иными словами, при бесконечно малом параллельном перенесении репера e_α по i–му направлению образы разложатся по исходному реперу с коэффициентами $\Gamma^\alpha_{\beta i}$.*

Доказательство. По определению

$$\left(\nabla_{e_i}(e_j)\right)^r = (e_i)^s \left(\nabla_s(e_j)\right)^k = \delta^s_i \left(\frac{\partial (e_j)^k}{\partial x^s} + \Gamma^k_{rs}(e_j)^r\right) =$$

$$= \delta_i^s \left(\frac{\partial(\delta_j^k)}{\partial x^s} + \Gamma_{rs}^k \delta_j^r \right) = \delta_i^s \left(\Gamma_{rs}^k \delta_j^r \right) = \Gamma_{ji}^k. \qquad \square$$

Задача 8.11. Описать операцию параллельного перенесения в римановой связности на поверхности в геометрических терминах (проектирование).

Теорема 8.12. *Пусть (M, g) — риманово многообразие. Для каждой точки $P_0 \in M$ найдутся такие окрестность U и число $\varepsilon > 0$, что любые две точки окрестности U соединяет единственная геодезическая длины меньше ε. При этом геодезичесая гладко зависит от своих концов.*

Доказательство. По лемме 8.7 можно для некоторой окрестности V точки $(P_0, 0)$ в многообразии линейных элементов TM, имеющей вид

$$V = \{(P, v) \in TM \mid P \in U, \|v\| < \varepsilon\}$$

для некоторой окрестности U точки P_0, определить гладкое отображение

$$E : V \to M \times M, \qquad (P, v) \mapsto (P, \exp_P(v)),$$

где $\exp_P$ ставит в соответствие вектору v значение $\gamma(1)$ единственной геодезической, выходящей из P по направлению v. В силу локальности, до 1 продолжаются геодезические (решения системы дифференциальных уравнений) с малой длиной v.

Вычислим якобиан E в $(P_0, 0)$. Для этого наряду с координатами $(x^1, \ldots, x^n; v^1, \ldots, v^n)$ в окрестности $(P_0, 0)$ в TM, где $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, рассмотрим координаты $(x_1^1, \ldots, x_1^n; x_2^1, \ldots, x_2^n)$ в $U \times U \subset M \times M$. Для касательного отображения dE имеем:

$$\frac{\partial x_1^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \qquad \frac{\partial x_1^i}{\partial v^j} = 0, \qquad d_{P_0} \exp_{P_0}([v \cdot t]) = \left. \frac{d\gamma_v}{dt} \right|_0 = v$$

в смысле второго определения касательного вектора. Таким образом, матрица Якоби $d_{P_0} E$ равна $\begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$ где I — единичная матрица, а якобиан в указанных координатах равен 1. Таким образом, по теореме о неявной функции, E диффеоморфно отображает некоторую окресность V' точки $(P_0, 0) \in TM$ на окрестность W' точки (P_0, P_0) в $M \times M$. Переходя к меньшим окрестностям, можем считать, что $W' = U' \times U'$, причем U' содержится внутри шара радиуса ε относительно g, т. е. нижняя грань длин кривых, соединяющих центр шара P_0 с любой его точкой меньше $\varepsilon/2$. Тогда U' — искомая окрестность точки P_0. Действительно, пусть P и Q — две произвольные точки U'. Рассмотрим геодезическую γ, выходящую из точки P' по направлению вектора v, где $(P', v) = E^{-1}(P, Q)$. Тогда, по определению E, имеем $P' = P$ и $\gamma(1) = Q$. Таким образом, точки P и Q соединены геодезической γ. Определенная таким образом геодзическая, по указанной теореме, гладко зависит от своих концов P и Q. Определим ее длину. В силу доказанной выше леммы, длина касательного вектора к геодезической постоянна, поэтому параметр отличается от натурального на постоянный множитель, в данном случае равный $\|v\|$. Тогда длина кривой γ от 0 до 1 равна $1 \cdot \|v\| < \varepsilon$. Осталось проверить единственность. Пусть из P в Q проведена геодезическая длины меньше ε. Тогда она является решением соответствующей задачи с начальными условиями и потому единственна, так как в этом случае длина касательного вектора в начале меньше $\varepsilon \cdot t$, где $\gamma(t) = Q$, и отсутствие единственности противоречило бы биективности E. $\square$

Задача 8.13. Показать, что в координатах, заданных отображением exp, все Γ^i_{jk} обращаются в P_0 в нуль.

9. Тензор кривизны Римана

Хотелось бы описать на тензорном языке отличие результата параллельного перенесения сначала по i-му направлению, а потом по j-му от перенесения в другом порядке. Конечно контур не замкнут, поэтому контур устремляем к нулю. Оказывается, результат связан с евклидовостью метрики (в римановом случае).

Всюду в этом параграфе связность предполагается **симметрической**. Рассмотрим в пределах действия системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ действие $\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k$ на векторное поле T^i (так что результат — тензор типа (1,2)). Получаем

$$\nabla_l T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + T^r \Gamma^i_{rl},$$

$$\nabla_k \nabla_l T^i = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \, \partial x^l} + \frac{\partial T^r}{\partial x^k} \Gamma^i_{rl} + T^r \frac{\partial \Gamma^i_{rl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk} \left(\frac{\partial T^s}{\partial x^l} + T^r \Gamma^s_{rl} \right) - \Gamma^s_{lk} \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^s} + T^r \Gamma^i_{rs} \right),$$

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, T^i =$$

$$= T^r \left(\frac{\partial \Gamma^i_{rl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{rk}}{\partial x^l} \right) + \frac{\partial T^r}{\partial x^k} \Gamma^i_{rl} - \frac{\partial T^r}{\partial x^l} \Gamma^i_{rk} + \frac{\partial T^s}{\partial x^l} \Gamma^i_{sk} - \frac{\partial T^s}{\partial x^k} \Gamma^i_{sl} + T^r \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{rl} - T^r \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{rk} =$$

$$= T^r \left(\frac{\partial \Gamma^i_{rl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{rk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{rl} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{rk} \right).$$

Обозначая

$$R^i_{q,kl} := \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{ql} - \Gamma^i_{sl} \Gamma^s_{qk}, \tag{6}$$

получим, что

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, T^i = T^q \, R^i_{q,kl}.$$

Лемма 9.1. *Функции $R^i_{q,kl}$ образуют тензор типа* $(1,3)$.

Доказательство. Для любого векторного поля T функции $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, T^i$, а следовательно, и $T^q \, R^i_{q,kl}$, образуют тензорное поле типа $(1,2)$. Поскольку $R^i_{q,kl} = (e_q)^s \, R^i_{s,kl}$, то

$$R^{i'}_{q',k'l'} = (e_{q'})^{s'} \, R^{i'}_{s',k'l'} = (e_{q'})^s \, R^i_{s,kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = (e_{q'})^{s'} \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, R^i_{s,kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} =$$

$$= \delta^{s'}_{q'} \frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}} \, R^i_{s,kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = R^i_{s,kl} \frac{\partial x^s}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = R^i_{q,kl} \frac{\partial x^q}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \quad \square$$

Замечание 9.2. Факт, полученный при доказательстве, может быть сформулирован в более общем виде следующим образом: коэффициенты линейной зависимости тензоров образуют тензор.

Определение 9.3. Тензор $R^i_{q,kl}$ называется *тензором кривизны Римана* симметрической связности ∇.

Лемма 9.4. *Пусть в некоторой точке (а значит, и в ее окрестности) многообразия M тензор кривизны Римана некоторой симметрической связности отличен от нуля. Тогда в окрестности нельзя ввести евклидовы координаты данной связности.*

Доказательство. Если бы такие координаты существовали бы, то по определению в них обнулялись бы символы Кристоффеля, а значит, и тензор Римана. □

Перейдем к инвариантному определению R.

Определение 9.5. *Коммутатором* векторных полей X и Y называется векторное поле

$$[X,Y] := X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}.$$

Для симметрической связности

$$\nabla_X Y^k - \nabla_Y X^k = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ji}\right) - Y^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^j \Gamma^k_{ji}\right) = [X,Y]^k, \qquad (7)$$

в частности, операция тензорная.

Определение 9.6. Определим *оператор кривизны*

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X,Y]}(Z).$$

Он сопоставляет трем векторным полям X, Y и Z некоторое четвертое векторное поле. Ввиду явного неравноправия третьего аргумента по отношению к первым двум, мы пишем $R(X,Y)Z$, а не $R(X,Y,Z)$.

Теорема 9.7. *Отображение R трилинейно. Следовательно, оно определяет тензор типа* $(1,3)$.

Доказательство. Если R — трилинейное отображение от векторных полей со значениями в векторных полях, то отображение

$$\widetilde{T}(X,Y,Z;\omega) := \omega(T(X,Y,Z))$$

будет 4-линейным от 3 векторных и 1 ковекторного поля со значениями в функциях. Таким образом, вторая часть утверждения теоремы следует из первой.

Трилинейность в точке очевидна. Необходимо доказать коммутирование с умножением на гладкие функции. Докажем, что $R(X,Y)(fZ) = f \cdot R(X,Y)Z$:

$$\nabla_X \nabla_Y(fZ) - \nabla_Y \nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) =$$

$$= \nabla_X((\nabla_Y f)Z) + \nabla_X(f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((\nabla_X f)Z) - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}(f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z =$$

$$= (\nabla_X \nabla_Y f)Z + \nabla_Y f\, \nabla_X Z + \nabla_X(f)\nabla_Y Z + f(\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y \nabla_X f)Z - \nabla_X f\, \nabla_Y Z -$$

$$-\nabla_Y f\, \nabla_X Z - f(\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}(f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z =$$

$$= \Big(\nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f - \nabla_{[X,Y]}(f)\Big)\, Z + f\Big((\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z\Big) =$$

$$= f \cdot R(X,Y)Z,$$

так как первая скобка обнуляется, поскольку

$$\nabla_X \nabla_Y f - \nabla_Y \nabla_X f - \nabla_{\nabla_X Y} f + \nabla_{\nabla_Y X} f =$$

$$= X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^k} + X^i Y^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^k} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^k} - Y^i X^k \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\, \partial x^k} -$$

$$-(X^i \nabla_i Y)^k \frac{\partial f}{\partial x^k} + (Y^i \nabla_i X)^k \frac{\partial f}{\partial x^k} =$$

$$= X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^k} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^k} - X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{si} Y^s\right) \frac{\partial f}{\partial x^k} + Y^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{si} X^s\right) \frac{\partial f}{\partial x^k} =$$

$$= \left(\Gamma^k_{si} X^s Y^i - \Gamma^k_{si} Y^s X^i\right) \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0$$

в силу симметричности связности.

Проверим теперь соотношение $R(fX,Y)Z = f \cdot R(X,Y)Z$. Заметим, что

$$(\nabla_{fX})T = (fX)^k \nabla_k T = f\, X^k \nabla_k T = f \cdot \nabla_X T, \qquad \nabla_{fX} = f\, \nabla_X$$

и

$$[fX, Y] = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) = f\, \nabla_X Y - (\nabla_Y f)\, X - f\, \nabla_Y X = f \cdot [X,Y] - (\nabla_Y f)\, X.$$

Получаем, что

$$R(fX,Y)Z = \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z =$$

$$= f\, \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]} Z + \nabla_{(\nabla_Y f) X} Z =$$

$$= f\, \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y(f) \nabla_X Z - f\,(\nabla_Y \nabla_X Z) - f\, \nabla_{[X,Y]} Z + (\nabla_Y f)\, \nabla_X Z = f\, R(X,Y)Z.$$

Аналогично доказывается, что $R(X, fY)Z = f \cdot R(X,Y)Z$. $\square$

Лемма 9.8. *Определения эквивалентны.*

Доказательство. Для базисных полей $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ имеем

$$R(e_i, e_j) Z^k = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} Z^k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} Z^k + \nabla_{[e_i,e_j]} Z^k = \nabla_i \nabla_j Z^k - \nabla_j \nabla_i Z^k,$$

поскольку $\nabla_{e_i} Z^k = (e_i)^m \nabla_m Z^k = \delta_i^m \nabla_m Z^k = \nabla_i Z^k$,

$$\nabla_i e_j - \nabla_j e_i = \Gamma^l_{ji} e_l - \Gamma^l_{ij} e_l = 0, \tag{8}$$

$$\nabla_X Y^k - \nabla_Y X^k = [X,Y]^k, \tag{9}$$

по (7) так как связность симметрична. По линейности получаем результат. $\square$

Теорема 9.9. (симметрии тензора Римана)

1) косая симметрия по полям X и Y:

$$R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0,$$

или

$$R^i_{j,kl} + R^i_{j,lk} = 0;$$

2) тождество Якоби:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$

или

$$R^i_{j,kl} + R^i_{k,lj} + R^i_{l,kj} = 0;$$

3) для тензора Римана римановой связности

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle = 0,$$

или в координатах

$$R_{ij,kl} + R_{ji,kl} = 0, \qquad \text{где} \qquad R_{ij,kl} = g_{ir}R^r_{j,kl};$$

4) для тензора Римана римановой связности

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle,$$

или в координатах

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}.$$

Доказательство. Пункт 1) следует непосредственно из определения тензора Римана.

2). В силу линейности достаточно проверить для (коммутирующих) базисных полей. По (8,9) для базисных полей

$$R(e_i,e_j)e_k + R(e_j,e_k)e_i + R(e_k,e_i)e_j = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k - \nabla_{[e_i,e_j]}e_k +$$

$$+\nabla_{e_j}\nabla_{e_k}e_i - \nabla_{e_k}\nabla_{e_j}e_i - \nabla_{[e_j,e_k]}e_i + \nabla_{e_k}\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_i}\nabla_{e_k}e_j - \nabla_{[e_k,e_i]}e_j =$$

$$= \nabla_{e_i}[e_j,e_k] - \nabla_{e_j}[e_i,e_k] - \nabla_{e_k}[e_j,e_i] = 0.$$

Беря координату этого векторного равенства, получаем формулу в координатах.

3). Для произвольной билинейной формы B тождество поляризации

$$B(u+v,u+v) = B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) + B(v,v)$$

показывает, что кососимметричность равносильна выполнению условия $B(w,w) = 0$ для любого вектора w. Вместе с нашим стандартным рассуждением о линейности это сводит задачу к проверке для любого векторного поля Z равенства $\langle R(e_i,e_j)Z, Z\rangle = 0$. С учетом (8,9), достаточно доказать, что

$$\langle \nabla_i\nabla_j Z, Z\rangle = \langle \nabla_j\nabla_i Z, Z\rangle.$$

Поскольку для функций ковариантная производная совпадает с частной, а связность риманова, то

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\langle Z, Z\rangle = \nabla_i\left(\langle\nabla_j Z, Z\rangle + \langle Z, \nabla_j Z\rangle\right) = 2\,\nabla_i\,\langle\nabla_j Z, Z\rangle = 2\,\langle\nabla_i\nabla_j Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_j Z, \nabla_i Z\rangle$$

и

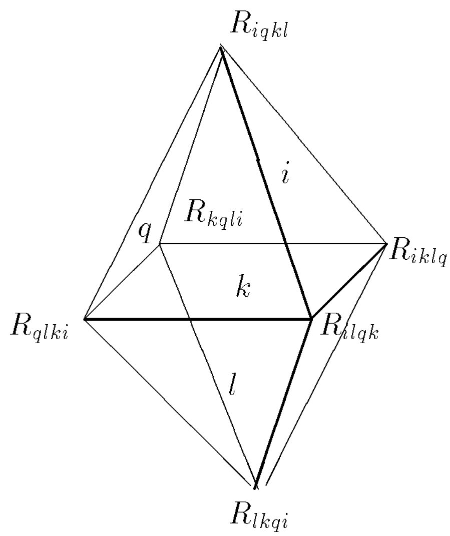
$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\langle Z, Z\rangle = 2\,\langle\nabla_j\nabla_i Z, Z\rangle + 2\langle\nabla_i Z, \nabla_j Z\rangle.$$

Вычитая из первого соотношения второе и пользуясь еще раз симметричностью скалярного произведения, получаем требуемое соотношение. Чтобы получить выражение в координатах, запишем:

$$0 = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle + \langle R(e_i, e_j)e_l, e_k\rangle = g_{rs}(R(e_i, e_j)e_k)^r(e_l)^s + g_{rs}(R(e_i, e_j)e_l)^r(e_k)^s =$$

$$= g_{rs}R^r_{m,ij}(e_k)^m\delta^s_l + g_{rs}R^r_{m,ij}(e_l)^m\delta^s_k = g_{rl}R^r_{k,ij} + g_{rk}R^r_{l,ij} = g_{lr}R^r_{k,ij} + g_{kr}R^r_{l,ij} = R_{lk,ij} + R_{kl,ij}.$$

4). Для доказательства удобно рассуждать с картинкой. У октаэдра правая верхняя грань обозначена через i, в ее вершинах стоят компоненты, номера которых начинаются с i, а остальные три циклически переставляются. Грани, примыкающие углом к вершинам грани i, у которых второй индекс — q, k и l, обозначаются этми буквами. Это левая верхняя, нижняя задняя и нижняя передняя грани. В вершинах, центрально симметричных уже обозначенным, ставятся компоненты с симметричными номерами, т. е., например, напротив верхней вершины R_{iqkl} — нижняя R_{lkqi}.



Сумма компонент, стоящих в вершинах каждой обозначенной грани, равна нулю, как следует из уже доказанных пунктов. Для грани i это сразу сдедует из тождества Якоби. Проверим это, например, для грани q:

$$R_{iqkl} + R_{kqli} + R_{qlki} = -R_{qikl} - R_{qkli} - R_{qlik} = 0$$

опять по тождеству Якоби. Теперь сложим тождества для двух верхних граней i и q и вычтем для нижних k и l:

$$0 = (R_{iqkl} + R_{iklq} + R_{ilqk}) + (R_{iqkl} + R_{kqli} + R_{qlki}) -$$

$$-(R_{kqli} + R_{iklq} + R_{lkqi}) - (R_{ilqk} + R_{lkqi} + R_{qlki}) = 2R_{iqkl} - 2R_{lkqi}. \qquad \square$$

До конца этого параграфа мы будем заниматься римановыми связностями.

Определение 9.10. Свертка $R_{jl} = R^i_{jil}$ тензора Римана называется *тензором Риччи* данной римановой связности. Свертка после поднятия индекса у тензора Риччи $R = g^{li}R_{il}$ называется *скалярной кривизной.*

Задача 9.11. Доказать, что тензор Риччи симметричен.

Теорема 9.12. *Для римановой связности выполнено тождество*

$$R_{iqkl} = g_{ir}R^r_{qkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + g_{mp}(\Gamma^m_{qk}\Gamma^p_{il} - \Gamma^m_{ql}\Gamma^p_{ik}).$$

Доказательство. Обозначим при фиксированных q и l через Φ^i_{ql} векторное поле, совпадающее в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ с Γ^i_{ql}. В этой системе координат

$$g_{ir}R^r_{qkl} = g_{ir}\left[\frac{\partial \Gamma^r_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^r_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^r_{pk} - \Gamma^p_{qk}\Gamma^r_{pl}\right] =$$

$$= g_{ir}\, 2\, Alt_{(k,l)}\left[\frac{\partial \Gamma^r_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^p_{ql}\Gamma^r_{pk}\right] = 2\, Alt_{(k,l)}\left[g_{ir}\,\nabla_k\Phi^r_{ql} + \underbrace{(\nabla_k g_{ir})}_{0}\,\Phi^r_{ql}\right] =$$

$$= 2\, Alt_{(k,l)}\left[\nabla_k(g_{ir}\Phi^r_{ql})\right].$$

Поскольку

$$g_{ir}\,\frac{1}{2}\,g^{rs}\left(\frac{\partial g_{sq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^s}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^i}\right),$$

а при фиксированных q и l поле $g_{ir}\Phi^r_{ql}$ — типа (0,1), то

$$g_{ir}R^r_{qkl} = Alt_{(k,l)}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^i}\right) - \left(\frac{\partial g_{mq}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^m}\right)\Gamma^m_{ik}\right] =$$

$$= Alt_{(k,l)}\left[\left(\frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^i}\right) - 2\, g_{mr}\Gamma^r_{lq}\,\Gamma^m_{ik}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{iq}}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^i}\right) -$$

$$-g_{mr}\Gamma^r_{lq}\,\Gamma^m_{ik} + g_{mr}\Gamma^r_{kq}\,\Gamma^m_{il},$$

что дает требуемый результат после учета симметричности связности и метрики. $\square$

Следствие 9.13. *Если тензор кривизны не обращается в ноль в некоторой системе координат, то на многообразии нельзя ввести локально метрически евклидовы координаты (матрица метрического тензора постоянна) или локально евклидовы в смысле связности (символы Кристоффеля равны нулю).*

Задача 9.14. Чему равен тензор кривизны одномерного многообразия ?

Теорема 9.15. *На двумерной гиперповерхности M скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой: $R = 2\,K$.*

Доказательство. Поскольку равенство проверяется поточечно, то можем считать, что в окрестности исследуемой точки $P \in M$ многообразие задано в виде графика $x^3 = f(x^1, x^2)$ в декартовых координатах, $x^3(P) = 0$, касательная плоскость $T_P M = Ox^1x^2$,

$$\vec{r}_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x^1}), \qquad \vec{r}_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x^2}),$$

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2, \qquad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2, \qquad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

— компоненты римановой метрики в точке P. Из вида касательной плоскости получаем, что в точке P выполнено $\frac{\partial f}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$. Значит, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} = 0 \qquad \text{в точке} \quad P,$$

то $\frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij})|_P = 0$. Поэтому и $\Gamma^i_{jk}(P) = 0$. По формуле из теоремы 9.12 (единственная существенная) компонента (для краткости пишем $\frac{\partial f}{\partial x^i} = f_i$)

$$R_{12,12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2(f_1 f_2)_{12} - ((f_2)^2)_{11} - ((f_1)^2)_{22}\right\} = (f_{11} f_2 + f_1 f_{12})_2 - (f_2 f_{21})_1 - (f_1 f_{12})_2 =$$

$$= f_{112} f_2 + f_{11} f_{22} + f_{12} f_{12} + f_1 f_{122} - f_{12} f_{12} - f_2 f_{112} - f_{12} f_{12} - f_1 f_{122} =$$

$$= f_{11} f_{22} - f_{12} f_{12} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = K,$$

поскольку коэффициенты второй квадратичной формы

$$b_{ij}(P) = \langle \vec{r}_{ij}, \vec{n} \rangle = \langle (0, 0, f_{ij}), (0, 0, 1) \rangle = f_{ij},$$

а матрица первой — единичная, так что произведение главных кривизн совпадает с определителем матрицы второй формы. Заметим, что равенство $R_{12,12} = K$ мы установили в специальной системе координат, слева — компонента тензора, справа — скаляр. Далее,

$$R = g^{kl} R_{kl} = g^{kl} R^i_{k,il} = g^{kl} g^{ir} R_{rk,il}.$$

Рассмотрим симметрии $R_{ij,kl}$:

$$R_{12,12} = -R_{21,12} = -R_{12,21} = R_{21,21},$$

$$R_{11,ij} = R_{22,ij} = R_{km,11} = R_{km,22} = 0.$$

Поэтому

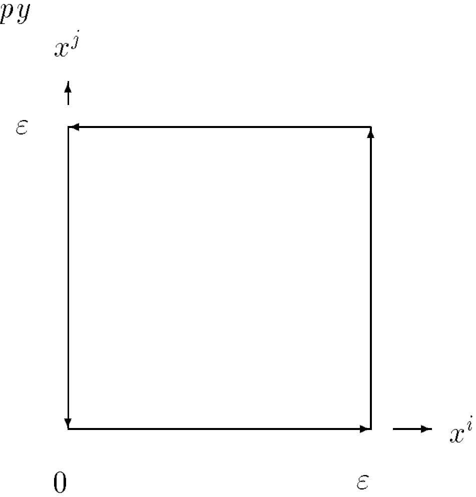
$$R = g^{22}g^{11}R_{12,12} + g^{12}g^{12}R_{21,12} + g^{21}g^{21}R_{12,21} + g^{11}g^{22}R_{21,21} =$$

$$= R_{12,12}(g^{22}g^{11} - g^{12}g^{12} - g^{21}g^{21} + g^{11}g^{22}) = 2 \cdot R_{12,12} \cdot \det \|g^{ij}\| = 2\frac{R_{12,12}}{\det \|g_{ij}\|}.$$

Это тензорное равенство. В нашей специальной системе координат $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ и $R(P) = 2 \cdot K(P)$. $\square$

Следствие 9.16. *Гауссова кривизна зависит только от первой формы поверхности и, следовательно, не меняется при изометриях.*

Лемма 9.17. *Пусть* $(x^1, \ldots, x^n)$ *— координаты в окрестности точки* $P \in M$*, где* (M, ∇) *— многообразие с симметрической связностью, не обязательно римановой,* $x^i(P) = 0, \quad \forall\, i$*. Пусть* $\xi \in T_PM$ *— произвольный вектор, а* $\xi_\varepsilon = \xi_\varepsilon(i,j)$ *— результат его перенесения по контуру*



Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\xi^k_\varepsilon-\xi^k}{\varepsilon^2}=R^k_{l,ij}\xi^l.$$

Доказательство. Выпишем приращение вдоль некоторой кривой от s_0 до s:

$$0=\frac{d\xi^k}{ds}+\Gamma^k_{lm}\xi^l\frac{dx^m}{ds},\qquad d\xi^k=-\Gamma^k_{lm}\xi^l dx^m,$$

и с точностью до второго порядка

$$\xi^k(s)\approx\xi^k(s_0)-\Gamma^k_{lm}(s_0)\xi^l(s_0)\Delta x^m,\qquad \Gamma^k_{lm}(s)\approx\Gamma^k_{lm}(s_0)+\frac{\partial\Gamma^k_{lm}}{\partial x^r}(s_0)\Delta x^r.$$

Таким образом,

$$d\xi^k\approx\left[-\left(\Gamma^k_{lm}(s_0)+\frac{\partial\Gamma^k_{lm}}{\partial x^r}(s_0)\Delta x^r\right)\cdot\left(\xi^l(s_0)-\Gamma^l_{pr}(s_0)\xi^p(s_0)\Delta x^r\right)\right]dx^m\approx$$

$$\approx\left[\Gamma^k_{lm}(s_0)\xi^l(s_0)+\left(-\frac{\partial\Gamma^k_{lm}}{\partial x^r}(s_0)\xi^l(s_0)+\Gamma^k_{lm}(s_0)\Gamma^l_{pr}(s_0)\xi^p(s_0)\right)\ \Delta x^r\right]\ dx^m.$$

Перейдем к замкнутому контуру, беря все значения по непрерывности в P, учтем, что первое слагаемое даст ноль, а затем учтем конкретный вид контура (в плоскости двух координат) и координатное выражение для тензора Римана:

$$\xi^k_\varepsilon-\xi^k\approx\left[-\frac{\partial\Gamma^k_{pm}}{\partial x^r}+\Gamma^k_{lm}\Gamma^l_{pr}\right]\xi^l\cdot\oint\Delta x^r\left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}du^1+\frac{\partial x^m}{\partial u^2}du^2\right)=\qquad\text{по формуле Грина}$$

$$=\left[-\frac{\partial\Gamma^k_{pm}}{\partial x^r}+\Gamma^k_{lm}\Gamma^l_{pr}\right]\xi^l\cdot\iint_\square\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\Delta x^r\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right)-\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\Delta x^r\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\right)\right)du^1\,du^2=$$

$$=\left[-\frac{\partial\Gamma^k_{pm}}{\partial x^r}+\Gamma^k_{lm}\Gamma^l_{pr}\right]\xi^l\cdot\iint_\square\left(\frac{\partial x^r}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}-\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^r}{\partial u^2}\right)du^1\,du^2=$$

$$=\left[-\frac{\partial\Gamma^k_{pm}}{\partial x^r}+\Gamma^k_{lm}\Gamma^l_{pr}\right]\xi^l\cdot\varepsilon^2\cdot\pm(\delta^{rm})=\varepsilon^2\,R^k_{lij}\xi^l.\qquad\square$$

Напомним следующее определение.

Определение 9.18. Два отображения f_0, $f_1 : M\to N$ гладкого многообразия M без края в многообразие N называются *гладко гомотопными,* если существует такое гладкое отображение F многообразия с краем $M\times[0,1]$ в N, что

$$F(P,0)=f_0(P),\qquad F(P,1)=f_1(P),\qquad\forall\,P\in M.$$

Этим определением не охватывается понятие гомотопии двух путей, так как путь является отображением многообразия с краем – отрезка. Чтобы определение работало, мы будем считать, что путь отображает не $[a,b]$, а $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$, так что $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\times[0,1]$ является многообразием. Конечно, при этом мы должны требовать, чтобы

$$F(0,t)=f_0(0)=f_1(1),\qquad F(1,t)=f_0(1)=f_1(1),\qquad\forall\,t\in[0,1].$$

Задача 9.19. Почему это необходимо ?

Если отказаться от требования гладкости, то получим определение (непрерывной) *гомотопии* непрерывных отображений f_0 и f_1 произвольного топологического пространства M в пространство N.

Задача 9.20. Покажите, что из непрерывной гомотопности двух гладких отображений следует их гладкая гомотопность.

Теорема 9.21. *Тензор Римана равен нулю тогда и только тогда, когда результаты параллельного перенесения по двум гомотопным путям совпадают (или, что то же самое, результат перенесения по стягиваемому замкнутому контуру совпадает с исходным вектором).*

Доказательство. Если результат перенесения по стягиваемому замкнутому контуру совпадает с исходным вектором, то, взяв в качестве него ε-контур из предыдущей леммы, получаем по ней, что тензор Римана равен нулю.

Обратно, пусть γ_0, $\gamma_1 : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to M$ — две гомотопные кривые, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = P_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = P_1$, гомотопия $G : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times [0,1] \to M$ удовлетворяет этому условию при любом t (считаем s параметром на $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, а t – на $[0,1]$). Образуем векторное поле $\xi_t(s)$ — касательное вдоль $G(s,t)$ при фиксированном t (в частности, $\xi_0(s)$ и $\xi_1(s)$ — касательные к γ_0 и γ_1), и векторное поле $\eta_s(t)$ — касательное вдоль $G(s,t)$ при фиксированном s. Образуем для заданного вектора $v \in T_{P_0}M$ векторное поле $v_s(t)$, где $v_s(t)$ — результат перенесения v вдоль $\gamma_t(s) = G(s,t)$ при фиксированном t в точку с параметром s. (Заметим, что при определении перенесения в общем случае мы не требовали регулярности, а только гладкость кривой.) Оказывается, поле $v_s(t)$ ковариантно постоянно вдоль $G(s,t)$ при фиксированном s.

Действительно,

$$\nabla_{\xi_t(s)}\nabla_{\eta_s(t)}v_s^i(t) - \nabla_{\eta_s(t)}\nabla_{\xi_t(s)}v_s^i(t) - \nabla_{[\xi_t(s),\eta_s(t)]}v_s^i(t) = R^i_{j,kl}v_s^j(t)\xi_t^k(s)\eta_s^l(t).$$

По определению $v_s(t)$ второе слагаемое слева равно нулю. В силу равенства нулю тензора Римана, равна нулю правая часть. Третье слагаемое слева равно нулю, так как, полагая $G(t,s) = (x^1(t,s), \dots, x^n(t,s))$, имеем

$$[\xi_t(s), \eta_s(t)]^k = \xi_t(s)^j \frac{\partial \eta_s(t)^k}{\partial x^j} - \eta_s(t)^j \frac{\partial \xi_t(s)^k}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial t}\right) - \frac{\partial x^j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} = 0.$$

Итак, поле $\nabla_{\eta_s(t)}v_s(t)$ ковариантно постоянно вдоль кривой $\gamma_t(s)$ и по построению равно 0 при $s=0$ (так как $v_0(t) \equiv v$). Следовательно, $\nabla_{\eta_s(t)}v_s(t) = 0$ при любом s, в частности, при $s=1$.

Таким образом, поскольку $G(1,t) \equiv P_1$, то $\eta_1(t) \equiv 0$ и

$$0 = \nabla_{\eta_1(t)}v_1^i(t) = \frac{d}{dt}v_1^i(t) + \Gamma^i_{mk}\eta_1^m(t)v_1^k(t) = \frac{d}{dt}v_1^i(t),$$

т. е. v_1 не зависит от t. □

10. Дифференцирование и интегрирование дифференциальных форм

Рассмотрим произвольную симметрическую связность ∇ на многообразии M (например, риманову связность некоторой метрики) и внешнюю дифференциальную форму ω ранга k, т. е. кососимметрическое тензорное поле типа $(0,k)$. Пространство таких форм будем обозначать через $\Lambda^k(M)$. Тогда определен *внешний дифференциал* или *градиент* $d\omega$ формы ω по формуле

$$d\omega := \pm\frac{(k+1)!}{k!} Alt\nabla\omega,$$

или в координатах

$$(d\omega)_{i_1\ldots i_{k+1}} = \pm\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}}(-1)^\sigma\nabla_{\sigma(j_{k+1})}\omega_{\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_k)}.$$

где $\pm$ выбирается так, чтобы в координатах

$$\pm(-1)^\sigma = sgn\begin{pmatrix} 1\ldots k, k+1 \\ \sigma(k+1)\sigma(1)\ldots\sigma(k)\end{pmatrix},$$

т. е. $\pm = (-1)^k$. Как следует из определения, $d\omega$ — внешняя форма ранга $k+1$.

Лемма 10.1. *Градиент $d\omega$ не зависит от выбора симметрической связности. Именно,*

$$(d\omega)_{i_1\ldots i_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_{s-1}j_{s+1}\ldots j_k}}{\partial x^{j_s}}.$$

Доказательство. По определению ковариантной производной

$$(d\omega)_{i_1\ldots i_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}}(-1)^\sigma\left[\frac{\partial\omega_{\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}} - \sum_{r=1}^{k}\omega_{\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_{r-1})\alpha\sigma(j_{r+1})\ldots\sigma(j_k)}\Gamma^\alpha_{\sigma(j_r)\sigma(j_{k+1})}\right] =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}}(-1)^\sigma\frac{\partial\omega_{\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}} -$$

$$-\frac{1}{k!}\sum_{\text{по четным }\sigma\in S_{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\left[\Gamma^\alpha_{\sigma(j_r)\sigma(j_{k+1})} - \Gamma^\alpha_{\sigma(j_{k+1})\sigma(j_r)}\right]\omega_{\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_{r-1})\alpha\sigma(j_{r+1})\ldots\sigma(j_k)} =$$

(в силу симметричности связности)

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}}(-1)^\sigma\frac{\partial\omega_{\sigma(j_1)\ldots\sigma(j_k)}}{\partial x^{\sigma(j_{k+1})}} =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{s=1}^{k+1}\sum_{\tau\in S_k} sgn\begin{pmatrix} 1\ldots k+1 \\ s\tau(1)\ldots\tau(s-1)\tau(s+1)\tau(k+1)\end{pmatrix}\frac{\partial\omega_{\tau(j_1)\ldots\tau(j_{s-1})\tau(j_{s+1})\ldots\tau(j_{k+1})}}{\partial x^{j_s}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{s=1}^{k+1} \sum_{\tau \in S_k} (-1)^{s-1} (-1)^{\tau} \frac{\partial \omega_{\tau(j_1)\ldots\tau(j_{s-1})\tau(j_{s+1})\ldots\tau(j_{k+1})}}{\partial x^{j_s}} =$$

(в силу кососимметричности ω)

$$= \frac{1}{k!} \sum_{s=1}^{k+1} \sum_{\tau \in S_k} (-1)^{s-1} (-1)^{\tau} (-1)^{\tau} \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots j_{s-1}, j_{s+1} \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot k! \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots j_{s-1}, j_{s+1} \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}. \qquad \square$$

Замечание 10.2. Градиент дифференциальной формы в координатах можно получить "непосредственным дифференцированием". Именно, если мы заметим, что обычный дифференциал функции совпадает с внешним, и, следовательно его можно обозначать через df, не опасаясь путаницы (это 1-форма, которая всегда (косо)симметрична), то для

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

определим

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} d(\omega_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{i_0} \frac{\partial(\omega_{i_1 \ldots i_k})}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Тогда это определение совпадает с данным выше.

Задача 10.3. Проверить.

Теорема 10.4. *Пусть $\omega_{(1)}$ и $\omega_{(2)}$ — дифференциальные формы степеней p и q соответственно. Тогда*

$$d(\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)}) = d\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} + (-1)^p \omega_{(1)} \wedge d\omega_{(2)}.$$

Доказательство. Достаточно проверить в одной из карт для форм вида (в силу линейности проверяемого равенства)

$$\omega_{(1)} = f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \qquad \omega_{(2)} = g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Тогда по предыдущему замечанию

$$d(\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)}) = d(fg\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^k} g\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} + f \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \right) \wedge \left(g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \right) +$$

$$+ (-1)^p \left(f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \right) =$$

$$= d\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} + (-1)^p \omega_{(1)} \wedge d\omega_{(2)}. \qquad \square$$

Теорема 10.5. *Для любой формы ω имеем $d(d\omega) = 0$.*

Доказательство. Снова достаточно проверить для формы вида $\omega = f\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Более того, если теорема доказана для $\omega_{(1)}$ и $\omega_{(2)}$, то она верна и для их внешнего произведения. Действительно,

$$dd(\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)}) = d(d\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} + (-1)^p \omega_{(1)} \wedge d\omega_{(2)}) =$$

$$= dd\omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} + (-1)^{p+1} d\omega_{(1)} \wedge d\omega_{(2)} + (-1)^p d\omega_{(1)} \wedge d\omega_{(2)} + (-1)^{p+p} \omega_{(1)} \wedge dd\omega_{(2)} = 0.$$

Таким образом, осталось проверить для f и для dx^i. Имеем

$$d(df) = d(\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k}\,dx^i \wedge dx^k = \sum_{i<k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^k = 0.$$

Что касается dx^i, то применим проведенную выкладку к $f = x^i$:

$$dd(dx^i) = d(ddx^i) = d(0) = 0. \qquad \square$$

Определение 10.6. Внешняя дифференциальная форма называется *замкнутой,* если $d\omega = 0$, т. е. $\omega \in \operatorname{Ker} d$, и *точной,* если $\omega = d\omega_1$ для некоторой формы ω_1, т. е. $\omega \in \operatorname{Im} d$.

По предыдущей лемме (очевидно, линейное) отображение d обладает свойством $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$. Таким образом, для каждого k определено факторпространство k-мерных замкнутых форм по k-мерным точным формам. Это линейное пространство $H^k(M)$ называется *группой k-мерных когомологий де Рама* многообразия M.

По аналогии с обратным образом билинейной формы можно определить обратный образ дифференциальной формы.

Определение 10.7. Пусть $f : M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий, $\omega \in \Lambda^k(N)$ — дифференциальная форма. *Обратным образом* $f^*\omega$ этой формы называется полилинейное отображение векторных полей на M:

$$f^*\omega(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) := \omega(d_P f(\vec{v}_1), \ldots, d_P f(\vec{v}_k)), \qquad \vec{v}_i \in T_P M.$$

Задача 10.8. Проверить, что получили дифференциальную форму.

Лемма 10.9. *Пусть $(x^1, \ldots, x^m)$ — локальная система координат в окрестности $P \in M$, а $(y^1, \ldots, y^n)$ — в окрестности $f(P) \in N$, так что локально $f : M \to N$ задается системой функций*

$$y^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^m),$$

а форма ω —

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(y^1, \ldots, y^n) dy^{i_1} \wedge \ldots \wedge dy^{i_k}.$$

Тогда обратный образ локально представляется формулой

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(y^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^m)) \times$$

$$\times\, df^{i_1}(x^1, \ldots, x^m) \wedge \ldots \wedge df^{i_k}(x^1, \ldots, x^m). \tag{10}$$

Доказательство.

$$f^*(\omega)(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k)=\omega(d_Pf(\vec{v}_1),\ldots,d_Pf(\vec{v}_k))=\omega(d_Pf(\vec{v}_1),\ldots,d_Pf(\vec{v}_k))=$$

$$=\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}(y^1,\ldots,y^n)dy^{i_1}\wedge\ldots\wedge dy^{i_k}\right)(d_Pf(\vec{v}_1),\ldots,d_Pf(\vec{v}_k))=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}(y^1,\ldots,y^n)\,Alt^{[i_1,\ldots,i_k]}\left\{dy^{i_1}(d_Pf(\vec{v}_1))\ldots dy^{i_k}(d_Pf(\vec{v}_k))\right\}=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}(y^1,\ldots,y^n)\,Alt^{[i_1,\ldots,i_k]}\left\{\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}}(\vec{v}_1)^{j_1}\ldots\frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^{j_k}}(\vec{v}_1)^{j_k}\right\}=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}(y^1,\ldots,y^n)\,Alt^{[i_1,\ldots,i_k]}\left\{df^{i_1}(\vec{v}_1)\ldots df^{i_k}(\vec{v}_1)\right\}=$$

$$=\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}(y^1,\ldots,y^n)df^{i_1}\wedge\ldots\wedge df^{i_k}\right)(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k).\qquad\Box$$

Определение 10.10. Пусть на гладком ориентированном многообразии M, $\dim M=n$, задана форма ω максимальной степени (т. е. $\deg\omega=n$) с компактным носителем в одной карте (U,φ_α) с координатами $(x^1_\alpha,\ldots,x^n_\alpha)$. Здесь и далее, если не оговорено противное, под картой **всегда** подразумевается карта из **ориентирующего атласа.** Определим *интеграл* от ω по U формулой

$$\int\limits_U\omega:=\int\limits_{\varphi_\alpha(U)\subset\mathbf{R}^n}\omega^\alpha_{12\ldots n}\,dx^1_\alpha\ldots dx^n_\alpha. \tag{11}$$

Лемма 10.11. *Интеграл определен корректно, т. е. правая часть* (11) *не зависит от выбора локальных координат в пределах* U.

Доказательство. Пусть (U,φ_β) — другая карта на U с локальными координатами $(x^1_\beta,\ldots,x^n_\beta)$. Тогда по правилу замены координат в кратном интеграле и лемме 6.31 в силу положительной ориентированности обеих карт

$$\int\limits_{\varphi_\beta(U)\subset\mathbf{R}^n}\omega^\beta_{12\ldots n}\,dx^1_\beta\ldots dx^n_\beta=\int\limits_{\varphi_\alpha(U)\subset\mathbf{R}^n}\omega^\beta_{12\ldots n}\cdot\left|\det\left\|\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\right\|\right|\,dx^1_\alpha\ldots dx^n_\alpha=$$

$$=\int\limits_{\varphi_\alpha(U)\subset\mathbf{R}^n}\omega^\beta_{12\ldots n}\cdot\det\left\|\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\right\|\,dx^1_\alpha\ldots dx^n_\alpha=\int\limits_{\varphi_\alpha(U)\subset\mathbf{R}^n}\omega^\alpha_{12\ldots n}\,dx^1_\alpha\ldots dx^n_\alpha.\qquad\Box$$

Определение 10.12. Пусть M — гладкое ориентированное многообразие, $\dim M=n$, форма ω максимальной степени (т. е. $\deg\omega=n$) с компактным носителем. Для локально конечного атласа $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ и подчиненного ему разбиения единицы ψ_α определим *интеграл*

$$\int\limits_M\omega=I(M,\omega,\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,\psi_\alpha)\}):=\sum_\alpha\int\limits_{U_\alpha}\psi_\alpha\omega.$$

Лемма 10.13. *Интеграл определен корректно, т. е. не зависит от выбора* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)\}$.

Доказательство. Если у нас есть два разных атласа, то возьмем их объединение, а разбиение единицы дополним нулевыми функциями. Для каждого из них интеграл не изменится. Таким образом, надо доказать

$$I(M, \omega, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)\}) = I(M, \omega, \{(U_\alpha, \varphi'_\alpha, \psi'_\alpha)\}).$$

Независимость (каждого слагаемого) от выбора координат, т. е. φ_α, уже доказана в предыдущей лемме. Итак, осталось доказать, что

$$I(M, \omega, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_\alpha)\}) = I(M, \omega, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \psi'_\alpha)\}).$$

Положим $\gamma_\alpha := \psi_\alpha - \psi'_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$, так что

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \gamma_\alpha = 0, \qquad k = N. \tag{12}$$

Тогда доказательство сводится к проверке формулы

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \int_{U_\alpha} \gamma_\alpha \omega, \qquad k = N, \tag{13}$$

которую мы будем проводить индукцией по k. Т. е. предположим, что для $k = 1, \dots, N-1$ и произвольных $\gamma_\alpha : 0 \to \mathbf{R}_+$ с $\operatorname{supp} \gamma_\alpha \subset U_\alpha$ формула (12) влечет (13) (для $k = 1$ это тривиально). Пусть гладкая функция $\chi : M \to [0,1]$ равна 1 на $\operatorname{supp} \gamma_N \subset U_N$ с $\operatorname{supp} \chi \subset U_N$. Такая функция имеется в силу нормальности топологического пространства M. Таким образом,

$$\chi \gamma_N \equiv \gamma_N, \qquad \gamma_N = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \gamma_\alpha = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \chi \gamma_\alpha, \qquad \operatorname{supp}(\chi\gamma_\alpha) \subset (U_N \cap U_\alpha).$$

Поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int_{U_\alpha} \gamma_\alpha \omega = \int_{U_N} \gamma_N \omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int_{U_\alpha} \gamma_\alpha \omega = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \int_{U_\alpha} \chi \gamma_\alpha \omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int_{U_\alpha} \gamma_\alpha \omega =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int_{U_\alpha} (\gamma_\alpha - \chi \gamma_\alpha) \omega. \tag{14}$$

Поскольку

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} (\gamma_\alpha - \chi\gamma_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \gamma_\alpha - \chi \sum_{\alpha=1}^{N-1} \gamma_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \gamma_\alpha + \chi \gamma_N = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \gamma_\alpha + \gamma_N = \sum_{\alpha=1}^{N} \gamma_\alpha = 0,$$

то мы можем применить к (14) предположение индукции. $\square$

Очевидно следующее утверждение

Предложение 10.14. *Интеграл является линейным отображением над* $\mathbf{R}$

$$\Lambda^n_{comp}(M, \mathrm{Or}) \to \mathbf{R}.$$

Определение 10.15. Теперь мы можем определить *объем компактного риманова многообразия* как абсолютную величину интеграла от формы объема.

Задача 10.16. Показать, что при смене ориентации интеграл меняет знак.

Задача 10.17. Показать, что, при некоторых естественных ограничениях на карты, можно вычислять интеграл от формы следующим образом: разбить многообразие на куски, каждый из которых лежит в одной карте, проинтегрировать ограничения формы в локальных координатах, а результаты сложить.

Теорема 10.18. (Общая формула Стокса). *Рассмотрим гладкое ориентированное многообразие M с краем ∂M, $\dim M = n$, и внешнюю дифференциальную форму ω с компактным носителем на M, $\deg \omega = n - 1$. Имеет место следующая общая формула Стокса*

$$(-1)^n \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \qquad \left(= \int_{\partial M} \varphi^* \omega\right), \tag{15}$$

где $\varphi : \partial M \to M$ — вложение края.

Доказательство. В силу линейности обеих частей формулы (15) по ω, достаточно ее проверить для формы ω с носителем в одной карте (поскольку $\omega = \sum_\alpha \psi_\alpha \omega$, где $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное некоторому локально конечному атласу) и имеющей вид

$$\omega = f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n, \qquad d\omega = (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где $f : \mathbf{R}^n_+ \to \mathbf{R}$ — гладкая функция с компактным носителем. Напомним, что $x^n \geq 0$ и ∂M характеризуется условием $x^n = 0$. Соответственно, рассмотрим сначала случай $k \leq n - 1$. Локально вложение края имеет вид

$$\varphi : \partial M \to M, \qquad \varphi(x^1, \ldots, x^{n-1}) = (x^1, \ldots, x^{n-1}, 0),$$

и $d\varphi^n = 0$, так что $\varphi^* \omega = 0$ (ср. (10)). Для левой части (15) имеем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n_+} d\omega = \int\limits_{\mathbf{R}^n_+} (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x^k}\, dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_+} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \right\} dx^1 \ldots dx^{k-1} dx^{k+1} dx^n =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}_+} \Big\{ f(x^1, \ldots, x^{k-1}, +\infty, x^{k+1}, \ldots, x^n) -$$

$$- f(x^1, \ldots, x^{k-1}, -\infty, x^{k+1}, \ldots, x^n) \Big\}\, dx^1 \ldots dx^{k-1} dx^{k+1} dx^n =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathbf{R}_+^{n-1}} \Big\{0 - 0\Big\}\, dx^1 \dots dx^{k-1} dx^{k+1} dx^n = 0$$

(законность перехода и равенство нулю в силу компактности носителя).

Рассмотрим теперь случай $k = n$. Теперь

$$\int\limits_{\mathbf{R}_+^n} d\omega = \int\limits_{\mathbf{R}_+^n} (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n}\, dx^1 \dots dx^n =$$

$$= (-1)^{n-1} \int\limits_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \right\} dx^1 \dots dx^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1} \int\limits_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \Big\{ f(x^1, \dots, x^{n-1}, +\infty) - f(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \Big\}\, dx^1 \dots dx^{n-1} =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{\mathbf{R}_0^{n-1}} f(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \dots dx^{n-1} = \int\limits_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \varphi^* \omega$$

(законность перехода и равенство нулю одного предела в силу компактности носителя). □

Задача 10.19. Вывести из общей формулы Стокса формулы

1) Грина;

2) Стокса;

3) Остроградского — Гаусса.