ДОПОЛНЕНИЯ

к конспекту и учебнику по аналитической геометрии
(осень 2014/15 уч. года, лектор – Е.В.Троицкий)
Рабочая версия по состоянию на 17 декабря 2014 г.

Содержание

1.	Оптическое свойство гиперболы	1
2.	Метод собственных векторов для симметрических матриц размера 2 и 3	1
3.	Теорема о конической поверхности над эллипсом	3

1. Оптическое свойство гиперболы

Лемма 1. *Пусть точки F_1 и F_2 лежат с разных сторон от прямой l. Тогда максимум модуля разности $\big||F_1X|-|F_2X|\big|$, где $X\in l$, достигается в такой точке X_0, для которой l является биссектрисой угла $F_1X_0F_2$.*

Доказательство. Рассмотрим точку F_2', симметричную F_2 относительно l, так что

$$\big||F_1X|-|F_2X|\big| = \big||F_1X|-|F_2'X|\big| \le |F_1F_2'|$$

(последнее неравенство — соотношение между сторонами треугольника). Это неравенство превращается в равенство (т.е. достигается максимум) для такой точки X_0, что F_1, F_2' и X_0 лежат на одной прямой (треугольник вырождается), и только для нее. При этом угол прямой F_1X_0 с l равен углу $F_2'X_0$ с l, который, в свою очередь, равен углу F_2X_0 с l, что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Лучи, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от нее "исходят" из другого, т. е. продолжение отраженного луча за точку отражения попадает в другой фокус.*

Доказательство. Пусть луч, выпущенный из фокуса F_1 попал в точку M на гиперболе. Обозначим через l касательную к гиперболе в точке M. При этом (аналогично случаю эллипса) все точки l, кроме M, лежат "вне" гиперболы, и значит, в точке M реализуется минимум модулей разностей $\big||F_1X|-|F_2X|\big|$ при $X\in l$. Поэтому по лемме 1 прямая l является биссектрисой соответствующего угла и по правилу "угол падения равен углу отражения" утверждение теоремы доказано. □

2. Метод собственных векторов для симметрических матриц размера 2 и 3

Определение 2.3. *Собственным вектором-столбцом* (с.в.) $n\times n$ матрицы A, отвечающим *собственному значению* (с.з.) λ, называется такой **ненулевой** столбец X высоты n, что $AX=\lambda X$.

Таким образом, задача нахождения с.в. и с.з. сводится к нахождению ненулевого решения однородной системы $(A-\lambda E)X=0$ с квадратной матрицей. Такое решение существует тогда и только тогда, когда матрица вырождена, т.е.

$$\chi_A(\lambda) := \det(A-\lambda E) = 0,$$

и множество с.з. совпадает с множеством корней *характеристического многочлена* $\chi_A(\lambda)$.

Мы ограничимся симметрической матрицей квадратичной части Q при $n=2,3$, которая изменяется по закону $Q'=C^TQC$. Если мы вдобавок ограничимся прямоугольными системами координат, т.е. замены будут с ортогональной матрицей $C^T = C^{-1}$, то характеристический многочлен, его корни (=с.з.) и с.в. не будут зависеть от выбора системы координат:

$$\chi_{Q'}(\lambda) = |Q' - \lambda E| = |C^T QC - \lambda E| = |C^{-1}QC - \lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(Q - \lambda E)C| =$$

$$= |C^{-1}| \cdot |Q - \lambda E| \cdot |C| = |Q - \lambda E| = \chi_Q(\lambda),$$

$$0 = (Q' - \lambda E)X' = C^{-1}(Q - \lambda E)CX', \quad C0 = (Q - \lambda E)CX', \quad 0 = (Q - \lambda E)X,$$

где X' — столбец координат в штрихованной системе координат.

Лемма 4. *Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — два различных с.з., а $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ — соответствующие им с.в. Тогда они ортогональны: $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$.*

Доказательство. Действительно, вспоминая, как записывается скалярное произведение в прямоугольных координатах, можем записать:

$$\lambda_1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = (QX_1)^T X_2 = X_1^T Q^T X_2 = X_1^T QX_2 = X_1^T \lambda_2 X_2 = \lambda_2 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle,$$

что при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ возможно только если $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$. □

Лемма 5. *Матрица Q' (=матрица Q в ортонормированном базисе ε') диагональна тогда и только тогда, когда ε' — базис из с.в.*

Доказательство. Вспоминая, что матрица перехода C — это матрица, в которой по столбцам записаны координаты векторов из ε' в базисе ε, можем записать

$$Q' = C^T QC = \begin{pmatrix} (E'_1)^T \\ \hline (E'_2)^T \\ \hline (E'_3)^T \end{pmatrix} Q\,(E'_1|E'_2|E'_3)\,, \qquad Q'_{ij} = (E'_i)^T QE'_j.$$

Диагональность матрицы Q' означает, что $Q'_{ij} = (E'_i)^T QE'_j = 0$ при $i \neq j$, или, в терминах скалярного произведения, $QE'_j \perp E'_i$ при $i \neq j$. Это то же самое (в прямоугольной системе координат), что $QE'_j = \lambda_j E'_j$ для некоторого λ_j, что и требовалось доказать. □

Таким образом, для доказательства диагонализации надо доказать существование у симметрической матрицы Q ортонормированного базиса из собственных векторов. Для матриц размера 2 мы это уже доказали, доказав существование поворота (в явном виде был найден угол), приводящего к диагональному виду. Сейчас мы проведем редукцию случая размерности 3 к случаю размерности 2.

Поскольку корни многочлена с вещественными коэффициентами либо вещественные, либо попарно комплексно сопряженные, то у многочлена порядка 3 (нечетного) существует хотя бы один вещественный корень, скажем, λ_1. Пусть $\vec{e'_1}$ — соответствующий с.в. длины 1. Дополним его произвольным образом до ортонормированного базиса $\vec{e'_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 6. *В указанном базисе $\vec{e'_i}$ матрица Q' имеет вид*

$$Q' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

где матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — симметрическая.

Доказательство. Имеем

$$Q'_{i1} = (E'_i)^T Q E'_1 = \lambda_1 (E'_i)^T E'_1 = \begin{cases} \lambda_1 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i \neq 1, \end{cases}$$

так что

$$Q' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Но, как мы знаем, Q' симметрична, а значит, имеет требуемый вид с симметрической $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. □

Теперь, используя доказанный двумерный случай, находим такой ортонормированный базис $\vec{e''_2}, \vec{e''_3}$, компланарный $\vec{e'_2}, \vec{e'_3}$, чтобы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ диагонализовалась. Таким образом, матрица квадратичной части Q'' в базисе $\vec{e''_1} = \vec{e'_1}, \vec{e''_2}, \vec{e''_3}$ диагональна. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 7. *Матрица квадратичной части диагонализуется в некотором ортонормированном базисе.*

Теперь мы хотим предложить способ нахождения этого базиса.

Заметим, что по лемме 5 построенный выше базис $\vec{e''_i}$ — базис из с.в., а на диагонали стоят с.з. Поскольку с.з. (=корни характеристического многочлена) не зависят от выбора (прямоугольных) координат, то это означает, что верно следующее утверждение.

Лемма 8. *У $\chi_Q(\lambda)$ все корни вещественны.*

После нахождения этих вещественных корней возможны следующие три случая:

Случай 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. Тогда после диагонализации матрица квадратичной части должна принять вид λE. Но тогда и в любом ортонормированном базисе она будет иметь такой же вид, т.е. она диагональна "с самого начала".

Случай 2: $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda$. Найдем с.в. $\vec{e'_1}$ длины 1, отвечающий λ_1 и дополним его до ортонормированного базиса $\vec{e'_i}$ *произвольным образом.* Утверждается, что это и есть искомый базис. Действительно, матрица будет иметь вид, как в лемме 6, но $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda E$ (аналогично случаю 1).

Случай 3: все корни различны. Тогда найдем соответствующие с.в. и отнормируем их. По лемме 4 они будут ортогональны и, таким образом, по лемме 5 дадут искомый базис.

3. Теорема о конической поверхности над эллипсом

Теорема 9. *Коническая поверхность над эллипсом является конусом второго порядка.*

Доказательство. Выберем такую систему координат с центром в O, что плоскость π задается уравнением $z = h \neq 0$. Если мы выберем направления осей Ox и Oy параллельно главным осям эллипса Γ, то уравнение эллипса в плоскости π примет вид:

$$F(x, y) = a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 - 1 = 0,$$

где $0 < a_{11} \leq a_{22}$. Тогда уравнение конической поверхности над ним:

$$\Phi(x, y, z) = z^2 F\left(\frac{x}{z} h, \frac{y}{z} h\right) = 0.$$

Действительно, точка (x, y, z), $z \neq 0$, принадлежит поверхности тогда и только тогда, когда точка $\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h, h\right)$ принадлежит кривой, т. е. $F\left(\frac{x}{z}\,h, \frac{y}{z}\,h\right) = 0$. Но при сделанном предположении $z \neq 0$ данное уравнение равносильно выводимому. Осталось доказать, что при $z = 0$ выводимое уравнение определено и его множество решений совпадает с O. Определенность следует из того, что во втором сомножителе степень $1/z$ равна 2 и при умножении пропадает. После умножения уравнение превращается (при $z = 0$) в $h^2\, q(x, y) = 0$. Поскольку асимптотических направлений у эллипса нет, то $x = y = 0$.

Итак,

$$\Phi(x, y, z) = z^2\,\left(a_{11}\left(\frac{x}{z}\,h - x_0\right)^2 + a_{22}\left(\frac{y}{z}\,h - y_0\right)^2 - 1\right) = 0,$$

$$a_{11}h^2x^2 + a_{22}h^2y^2 - 2a_{11}hx_0xz - 2a_{22}hy_0yz + (a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 - 1)z^2 = 0.$$

Т.к. в этом уравнении нет линейной части, то для того, чтобы показать, что это — конус, достаточно установить, что $\operatorname{rank} Q = 3$ и, более того, корни характеристического многочлена имеют разные знаки. Имеем:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11}h^2 & 0 & -a_{11}hx_0 \\ 0 & a_{22}h^2 & -a_{22}hy_0 \\ -a_{11}hx_0 & -a_{22}hy_0 & a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \delta &= a_{11}h^2[a_{22}h^2(a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 - 1) - a_{22}^2h^2y_0^2] - a_{11}^2a_{22}h^4x_0^2 = \\ &= a_{11}h^2[a_{22}a_{11}h^2x_0^2 - a_{22}^2h^2] - a_{11}^2a_{22}h^4x_0^2 = -a_{11}a_{22}h^4x_0^2 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, либо все корни отрицательные, либо два положительных и один отрицательный, как нам требуется. Но если все отрицательные, то получаем мнимый конус, у которого только одна (действительная) точка, а у нас их заведомо бесконечно много. Значит, остается только одна возможность — конус. $\square$