НЕКОММУТАТИВНАЯ ТЕОРЕМА РИССА И ТЕОРЕМА ТИПА БЕРНСАЙДА О СКРУЧЕННОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ

Е. В. Троицкий

Аннотация. Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части доказывается некоммутативный аналог теоремы Рисса(-Маркова-Какутани) о представлении функционалов на алгебре непрерывных функций регулярными мерами на подстилающем пространстве.

На основе этого во второй части доказывается слабый вариант теоремы типа Бернсайда о скрученной сопряженности для произвольных дискретных групп.

1. Введение и формулировка результатов

Определение 1.1. Пусть G — счетная дискретная группа, а $\phi : G \to G$ — ее эндоморфизм. Два элемента $x, x' \in G$ называются *ϕ-сопряженными* или *скрученно сопряженными,* если имеется такое $g \in G$, что

$$x' = gx\phi(g^{-1}).$$

Мы будем обозначать через $\{x\}_\phi$ класс *ϕ-сопряженности* или *скрученной сопряженности* элемента $x \in G$. Число классов ϕ-сопряженности называется *числом Райдемайстера* эндоморфизма ϕ и обозначается через $R(\phi)$. Если ϕ — тождественное отображение, то классы ϕ-сопряженности превращаются в обычные классы сопряженности группы G.

Если G — конечная группа, то классическая теорема Бернсайда (см., например, [1, с. 140]) утверждает, что число классов сопряженных элементов G равно числу классов эквивалентности ее неприводимых унитарных представлений, т.е. точек *унитарного дуального пространства* $\widehat{G}$.

Рассмотрим автоморфизм ϕ конечной группы G. Тогда $R(\phi)$ совпадает с размерностью пространства скрученно-инвариантных функций на группе, а, значит, по теореме Петера-Вейля (говорящей о существовании двусторонне эквивариантного изоморфизма $C^*(G) \cong \bigoplus_{\rho\in\widehat{G}} \operatorname{End}(H_\rho)$), с суммой размерностей d_ρ скрученно-инвариантных элементов $\operatorname{End}(H_\rho)$, где ρ пробегает $\widehat{G}$, а через H_ρ обозначено пространство представления ρ. По лемме Шура, $d_\rho = 1$, если ρ — неподвижная точка $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G}$, $\widehat{\phi}[\rho] := [\rho \circ \phi]$, и равно нулю в противоположном случае. Таким образом, $R(\phi)$ совпадает с числом неподвижных точек $\widehat{\phi}$ (см., например, [8]). Цель данной работы — обобщить это утверждение (видоизменив его должным образом) на бесконечные дискретные группы.

Автор частично поддержан грантом РФФИ 05-01-00923, грантом поддержки ведущих научных школ НШ-619.2003.1 и грантом "Университеты России" УР.04.02.530.

Замечание 1.2. Если $\phi : G \to G$ — эпиморфизм, то он индуцирует отображение $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G}$, $\widehat{\phi}(\rho) = \rho \circ \phi$ (поскольку отображение неприводимо тогда и только тогда, когда лишь скалярные операторы в пространстве представления коммутируют со всеми операторами представления). Это не так для произвольного эндоморфизма ϕ, поскольку $\rho \circ \phi$ может быть приводимым для неприводимого представления ρ, и $\widehat{\phi}$ можно определить только как многозначное отображение. Тем не менее, можно следующим образом определить множество неподвижных точек $\operatorname{Fix}\widehat{\phi}$ отображения $\widehat{\phi}$ на $\widehat{G}$ для случая общего эндоморфизма.

Определение 1.3. Пусть $\operatorname{Rep}(G)$ — множество классов эквивалентности конечномерных унитарных представлений G. Тогда соответствующее отображение $\widehat{\phi}_R : \operatorname{Rep}(G) \to \operatorname{Rep}(G)$ определяется, как и выше, по формуле $\widehat{\phi}_R(\rho) = \rho \circ \phi$.

Обозначим через $\operatorname{Fix}(\widehat{\phi})$ множество таких точек $\rho \in \widehat{G} \subset \operatorname{Rep}(G)$, что $\widehat{\phi}_R(\rho) = \rho$.

Теорема 1.4 (сильная теорема типа Бернсайда для групп типа I [9])**.** *Пусть G — конечнопорожденная дискретная группа типа* I*, ϕ — ее автоморфизм, $R(\phi)$ — число классов ϕ-сопряженности, а $S(\phi) = \#\operatorname{Fix}(\widehat{\phi})$ — число $\widehat{\phi}$-инвариантных классов унитарных неприводимых представлений. Если одно из чисел $R(\phi)$ и $S(\phi)$ конечно, то оно равняется другому.*

Пусть $\mu(d)$, $d \in \mathbb{N}$, — *функция Мебиуса*, т. е.

$$\mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } d = 1, \\ (-1)^k, & \text{если } d \text{ — произведение } k \text{ различных простых чисел,} \\ 0, & \text{если } d \text{ не свободно от квадратов.} \end{cases}$$

Теорема 1.5 (конгруэнции для чисел Райдемайстера, [9])**.** *Пусть $\phi : G \to G$ — такой эндоморфизм счетной дискретной группы G, что все числа $R(\phi^n)$ конечны, и пусть H — подгруппа G со свойствами: $\phi(H) \subset H$ и для всякого $x \in G$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\phi^n(x) \in H$. Если пара (H, ϕ^n) удовлетворяет условиям теоремы* 1.4 *для любого $n \in \mathbb{N}$, то для любого n выполняется*

$$\sum_{d|n} \mu(d) \cdot R(\phi^{n/d}) \equiv 0 \mod n.$$

Для групп типа II_1 ситуация гораздо сложнее. Так, например, в случае полупрямого произведения по действию $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ гиперболическим автоморфизмом, в [10] найден такой автоморфизм, что число Райдемайстера конечно (а именно, равно четырем), а число неподвижных точек $\widehat{\phi}$ на $\widehat{G}$ больше или равно пяти. Это явление связано с плохими свойствами отделимости пространства $\widehat{G}$ для общих дискретных групп. Более глубокое изучение ситуации приводит к следующей общей теореме, составляющей один из двух основных результатов данной работы.

Теорема 1.6 (слабая теорема типа Бернсайда для скрученных классов)**.** *Размерность $R_*(\phi)$ пространства скрученно инвариантных функций на G, лежащих в алгебре Фурье-Стилтьеса $B(G)$, равна числу $S_*(\phi)$ обобщенных неподвижных точек I гомеоморфизма $\widehat{\phi}$ (сумме коразмерностей пространств, порожденных элементами вида $a - \delta_g * a * \delta_{\phi(g^{-1})} + I$ в $C^*(G)/I$, где δ_g — дельта-функция с носителем в g) на* *спектре Глимма группы G, т. е. на полной регуляризации $\widehat{G}$, если хотя бы одно из чисел $R_*(\phi)$ и $S_*(\phi)$ конечно.*

Этот результат во многих случаях позволяет получить сильную форму теоремы типа Бернсайда $R(\phi) = S(\phi)$. Доказательство обобщенной теоремы Бернсайда в [9] для групп типа I (см. теорему 1.4 данной работы, а также [8, 10]) использовало отождествление $R(\phi)$ и размерности пространства (L^∞-) скрученно-инвариантных функций на G, т.е. скрученно-инвариантных функционалов на $L^1(G)$. Поскольку только часть L^∞-функций определяет функционалы на $C^*(G)$ (именно, функции Фурье-Стилтьеса), то, *a priori*, имеем $R_*(\phi) \leqslant R(\phi)$. Тем не менее, функции с некоторыми условиями симметрии очень часто лежат в алгебре Фурье-Стилтьеса, так что можно высказать гипотезу о том, что $R(\phi) = R_*(\phi)$, если $R(\phi) < \infty$. Так происходит во всех известных примерах.

Слабая теорема будет доказана следующим образом. Хорошо известная теорема Рисса(-Маркова-Какутани) отождествляет пространство линейных функционалов на алгебре $A = C(X)$ и пространство регулярных мер на X. Для доказательства слабой теоремы типа Бернсайда мы сначала получаем обобщение этой теоремы на случай некоммутативной C^*-алгебры A при помощи теоремы Даунса-Хофманна о представлении элементов алгебры сечениями. Это — второй основной результат данной работы. В нашем случае соответствующие меры на спектре Глимма являются функциональнозначными. В коммутативной ситуации и в случае одноточечного спектра Глимма эта теорема либо сводится к теореме Рисса, либо вырождается в тавтологию, однако для групповых C^*-алгебр дискретных групп во многих случаях получается новый инструмент для подсчета классов скрученной сопряженности.

Интерес к скрученным отношениям сопряженности берет начало, в частности, в теории неподвижных точек Нильсена-Райдемайстера (см., напр., [12, 8]), в теории Сельберга (см., напр., [14, 5]) и алгебраической геометрии (см., напр., [11]). Заметим, что число Райдемайстера эндоморфизма конечнопорожденной абелевой группы бесконечно тогда и только тогда, когда 1 не принадлежит спектру ограничения этого эндоморфизма на свободную часть группы (см., напр., [12]). Число Райдемайстера бесконечно для любого автоморфизма неэлементарной гиперболической по Громову группы [2].

Настоящая работа представляет собой часть исследовательской программы, выполняемой в Институте математики Макса Планка (МПИ) в Бонне совместно с А. Фельштыном. Автор выражает благодарность МПИ за его поддержку и гостеприимство в течение того времени, когда была получена большая часть результатов настоящей работы, а также МПИ и организаторам рабочих встреч по некоммутативной геометрии и теории чисел I, II (Бонн, август 2003 и июнь 2004), где была доложена значительная часть этих результатов.

Автор благодарен М. Б. Бекка, Л. И. Вайнерману, А. М. Вершику, В. М. Мануйлову, А. С. Мищенко, А. Л. Фельштыну, А. И. Штерну за полезные обсуждения, а также рецензенту за ценные замечания.

2. Алгебры операторных полей

Прежде всего, следуя [7] (см. также [3, §10]), напомним теорию операторных полей. Пусть T — топологическое пространство, для каждой точки $t \in T$ которого зафиксирована C^*-алгебра (более общо — инволютивная банахова алгебра) A_t.

Определение 2.1. *Структурой непрерывности для T и $\{A_t\}$* называется линейное пространство F операторных полей на T со значениями в $\{A_t\}$ (т.е. отображений, переводящих $t \in T$ в некоторый элемент A_t), обладающее следующими свойствами:

(1) если $x \in F$, то вещественнозначная функция $t \mapsto \|x(t)\|$ непрерывна на T;
(2) для каждого $t \in T$ множество $\{x(t) \,|\, x \in F\}$ плотно в A_t;
(3) F замкнуто относительно поточечного умножения и инволюции.

Определение 2.2. Операторное поле x называется *непрерывным* по отношению к F в точке t_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $y \in F$ и такая окрестность U точки t_0, что $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \in U$. Поле *x непрерывно на T*, если оно непрерывно во всех точках T.

Определение 2.3. *Полная алгебра операторных полей* — это семейство A операторных полей на T, обладающее следующими свойствами:

(1) A является *-алгеброй, т.е. замкнуто относительно поточечных алгебраических операций;
(2) для каждого $x \in A$ функция $t \mapsto \|x(t)\|$ непрерывна на T и обращается в нуль на бесконечности;
(3) для каждого t множество $\{x(t) \mid x \in A\}$ плотно в A_t;
(4) A полно по норме $\|x\| = \sup\limits_t \|x(t)\|$.

Полная алгебра операторных полей, очевидным образом, является структурой непрерывности. Если F — произвольная структура непрерывности, то пусть $C_0(F)$ — семейство всех тех операторных полей x, которые непрерывны на T по отношению к F и для которых функции $t \mapsto \|x\|$ обращаются в нуль на бесконечности. Можно показать, что $C_0(F)$ — полная алгебра операторных полей.

Лемма 2.4. *Для любой полной алгебры A операторных полей на T следующие условия эквивалентны:*

(1) *A — максимальная полная алгебра операторных полей;*
(2) *$A = C_0(F)$ для некоторой структуры непрерывности F;*
(3) *$A = C_0(A)$.*

Такая максимальная полная алгебра A операторных полей иногда называется *непрерывной прямой суммой* $\{A_t\}$. Мы будем изучать унитальный случай, при этом T будет компактным и условия обнуления на бесконечности для сечений не будет. Более того, мы будем предполагать, что T хаусдорфово, а значит, нормально. Полная алгебра в этом случае, очевидно, является *разделяющей,* в том смысле, что, если $s, t \in T$, $s \neq t$, $\alpha \in A_s$, $\beta \in A_t$, то найдется такой $x \in A$, что $x(s) = \alpha$, $x(t) = \beta$. Нам понадобится различать алгебру A и ее же, реализованную как алгебру сечений $\Gamma(\mathcal{A})$ поля алгебр $\mathcal{A} = \{A_t\}$. Мы будем обозначать через $\widehat{a} \in \Gamma(\mathcal{A})$ сечение, соответствующее элементу $a \in A$.

3. Функционалы и меры

Определение 3.1. Пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств T. *Мера на алгебре операторных полей* (МАОП), связанная с максимальной полной алгеброй операторных полей $A = \Gamma(\mathcal{A})$, — это функция множеств $\mu : S \mapsto \mu(S) \in \Gamma(\mathcal{A})^* = A^*$, где $S \in \Sigma$, причем $\mu(S)(a) = 0$ если $\operatorname{supp} \widehat{a} \cap S = \emptyset$.

Она *аддитивна,* если $\mu(\sqcup S_i)(a) = \sum_i \mu(S_i)(a)$.

Она *ограничена,* если верхняя грань по разбиениям $\{S_i\}$ пространства T суммы $\sum_i \|\mu(S_i)\|$ конечна. Эта верхняя грань обозначается через $\|\mu\|$.

Ограниченная аддитивная МАОП будет сокращенно называться ОА МАОП.

Определение 3.2. ОА МАОП называется *-*слабо регулярной* (РОА МАОП), если для каждых $E \in \Sigma$, $a \in A$, и $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $F \in \Sigma$, замыкание которого содержится в E, и множество $G \in \Sigma$, внутренность которого содержит E, что $|\mu(C)a| < \varepsilon$ для любого $C \in \Sigma$, удовлетворяющего $C \subset G \setminus F$.

В дальнейшем в качестве Σ мы в одном случае рассмотрим алгебру всех подмножеств T, а в другом — алгебру, порожденную замкнутыми подмножествами в T.

Определение 3.3. Пусть МАОП λ определена на алгебре Σ множеств в T, причем $\lambda(\emptyset) = 0$. Множество $E \in \Sigma$ называется λ-*множеством,* если для любого $M \in \Sigma$

$$\lambda(M) = \lambda(M \cap E) + \lambda(M \cap (T \setminus E)).$$

Лемма 3.4. *Пусть* λ — МАОП, *определенная на алгебре* Σ *множеств в* T, *причем* $\lambda(\emptyset) = 0$. *Семейство* λ-*множеств является подалгеброй* Σ, *на которой* λ *аддитивна. Более того, если* E — *объединение конечного набора* $\{E_n\}$ *дизъюнктных* λ-*множеств и* $M \in \Sigma$, *то* $\lambda(M \cap E) = \sum_n \lambda(M \cap E_n)$.

Доказательство. Ясно, что пустое множество, все пространство и дополнение к любому λ-множеству являются λ-множествами. Пусть теперь X и Y — λ-множества, а $M \in \Sigma$. Тогда, поскольку X — λ-множество,

$$\lambda(M \cap Y) = \lambda(M \cap Y \cap X) + \lambda(M \cap Y \cap (T \setminus X)), \tag{1}$$

и поскольку Y — λ-множество,

$$\lambda(M) = \lambda(M \cap Y) + \lambda(M \cap (T \setminus Y)), \tag{2}$$

$$\lambda(M \cap (T \setminus (X \cap Y))) = \lambda(M \cap (T \setminus (X \cap Y)) \cap Y) + \lambda(M \cap (T \setminus (X \cap Y)) \cap (T \setminus Y)),$$

следовательно,

$$\lambda(M \cap (T \setminus (X \cap Y))) = \lambda(M \cap (T \setminus X) \cap Y) + \lambda(M \cap (T \setminus Y)). \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\lambda(M) = \lambda(M \cap Y \cap X) + \lambda(M \cap Y \cap (T \setminus X)) + \lambda(M \cap (T \setminus Y)),$$

а из (3) — что

$$\lambda(M) = \lambda(M \cap Y \cap X) + \lambda(M \cap (T \setminus (X \cap Y))).$$

Таким образом, $X \cap Y$ — λ-множество. Поскольку $\cup X_n = T \setminus \cap(T \setminus X_n)$, получаем, что λ-множества образуют алгебру. Если теперь E_1 и E_2 — дизъюнктные λ-множества, то, заменяя M на $M \cap (E_1 \cup E_2)$ в определении 3.3, получаем, что

$$\lambda(M \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda(M \cap E_1) + \lambda(M \cap E_2).$$

Последнее утверждение леммы получается отсюда по индукции. □

Как известно, любой функционал τ на C^*-алгебре B представляется в виде линейной комбинации 4 положительных функционалов следующим каноническим способом. Сначала представляем τ в виде $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, где самосопряженные функционалы τ_1 и τ_2 определены формулами

$$\tau_1(a) = \frac{\tau(a) + \overline{\tau(a^*)}}{2}, \qquad \tau_2(a) = \frac{\tau(a) - \overline{\tau(a^*)}}{2i}. \tag{4}$$

По лемме о разложении Жордана каждый самосопряженный функционал α однозначно представляется в виде разности двух положительных функционалов $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$, если потребовать, чтобы

$$\|\alpha\| = \|\alpha_+\| + \|\alpha_-\| \tag{5}$$

(см. [4, §3.3], [13, Theorem 3.2.5]). Разложим соответствующим образом и МАОП. В силу однозначности разложения слагаемые будут МАОП. Если же мы имеем ОА МАОП, то аддитивность будет следовать из однозначности, а ограниченность (с удвоенной константой) из формул (4) и условия (5). По тем же соображениям, слагаемые будут *-слабо регулярны, если исходная МАОП являлась таковой. Таким образом, МАОП, фигурирующие в разложении, будут *положительны* в том смысле, что

$$\mu(E)[a^*a] \geqslant 0$$

для любого $E \in \Sigma$. В частности, они являются неубывающими по отношению к вложению множеств.

Лемма 3.5. *Множества F и G в* определении 3.2 *могут быть выбраны таким образом, что $|\mu(C)(fa)| < \varepsilon$ для любой непрерывной функции $f : T \to [0,1]$.*

Доказательство. Рассмотрим разложения $\mu = \sum_{i=1}^4 x_i\mu_i$, $a = \sum_{j=1}^4 y_j a_j$, где μ_i и a_j положительны, x_i, y_j — комплексные числа модуля $\leqslant 1$. Согласно определению 3.2 выберем множества F и G для $\varepsilon/16$, причем одновременно для всех пар μ_i, a_j. Тогда

$$0 \leqslant \mu_i(C)(f \cdot a_j) = \mu_i(C)((a_j)^{1/2} f (a_j)^{1/2}) \leqslant \mu_i(C)(a_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{16},$$

и

$$|\mu_i(C)(f \cdot a)| \leqslant \sum_{i,j=1}^{4} |x_i y_j| \cdot |\mu_i(C)(a_j)| \leqslant 16 \cdot \frac{\varepsilon}{16} = \varepsilon.$$

□

Теорема 3.6. *Пусть сепарабельная унитальная алгебра C^*-алгебра A изоморфна полной алгебре операторных полей $\Gamma(\mathcal{A})$ над хаусдорфовым T. Тогда функционалы на $A \cong \Gamma(\mathcal{A})$ отождествляются с* РОА МАОП $\mathcal{A}$.

Доказательство. Заметим, что из условий теоремы следует, что T — сепарабельный хаусдорфов компакт, а единичный шар сопряженного к A пространства в $*$-слабой топологии — метризуемый компакт. Очевидно, РОА МАОП образуют линейное нормированное пространство относительно $\|.\|$.

Прежде всего, мы хотим доказать, что естественное линейное отображение $\mu \mapsto \mu(T)$ является изометрией РОА МАОП в A^*. Поскольку $\|\mu(T)\| \leqslant \|\mu\|$, то его норма не превосходит единицы. Выберем теперь сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Пусть $E_1, \dots, E_n$ — такое разбиение T, что

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mu(E_i)\| \geqslant \|\mu\| - \varepsilon.$$

Пусть $a_i \in A$ — такие элементы нормы 1, что $\mu(E_i)(a_i) \geqslant \|\mu(E_i)\| - \varepsilon/n$.

В силу *-слабой регулярности μ и нормальности T можно выбрать такие замкнутые множества C_i, дизъюнктные открытые множества G_i и непрерывные функции $f_i : T \to [0,1]$, что $C_i \subset E_i$, $|\mu(E_i \setminus C_i)(a_j)| \leqslant \varepsilon/n^2$, $C_i \subset G_i$, $|\mu(G_i \setminus C_i)(a_j)| \leqslant \varepsilon/n^2$, (и оценки остаются верными и после умножения на положительные функции, как в лемме 3.5), $f_i(s) = 0$, если $s \notin G_i$, $f_i(s) = 1$, если $s \in C_i$, $i, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим элемент вида $a := \sum_i f_i a_i \in \Gamma(\mathcal{A}) = A$. Тогда $\|a\| \leqslant 1$ и

$$| \, \mu(S)(a) - \|\mu\| \, | \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)(a) - \mu(E_i)| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i \setminus C_i)(a) + \mu(C_i)(a) - \mu(E_i)(a_i)| + 2\varepsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \mu(E_i \setminus C_i)(f_j a_j) + \mu(C_i)(a_i) - \mu(E_i)(a_i) \right| + 2\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |\mu(E_i \setminus C_i)(f_j a_j)| + \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i \setminus C_i)(a_i)| + 2\varepsilon \leqslant n^2 \, \frac{\varepsilon}{n^2} + n \, \frac{\varepsilon}{n^2} + 2\varepsilon \leqslant 4\varepsilon.$$

Поскольку ε сколь угодно мало, $\|\mu\| = \|\mu(S)\|$.

Остается представить произвольный функционал φ как РОА МАОП. Этот функционал на $\Gamma(\mathcal{A})$ может быть продолжен по теореме Хана-Банаха до непрерывного функционала ψ на $B(\mathcal{A}) = \prod_{t \in T} A_t$ (C^*-алгебре возможно разрывных сечений $\mathcal{A}$ с sup-нормой). Этот функционал разлагается в сумму $\psi = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \psi_i$, где ψ_i — положительные функционалы, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $|\alpha_i| = 1$, $\|\psi_i\| \leqslant \|\psi\|$ (см. выше). Определим

$$\lambda(E)(a) := \psi(\chi_E a), \qquad \lambda_i(a) := \psi_i(\chi_E a), \quad i = 1, \dots, 4,$$

где $a \in \Gamma(\mathcal{A})$, а χ_E — характеристическая функция E. Очевидно, что $\lambda(T)(a) = \psi(a)$ и λ является ОА МАОП. В самом деле, первые два свойства из определения 3.1 очевидны. Третье проверяется для каждого λ_i, $i = 1, \dots, 4$:

$$\sum_{j=1}^{N} |\lambda_i(E_j)| = \sum_{j=1}^{N} \lambda_i(E_j)(\mathbf{1}) = \sum_{j=1}^{N} \psi_i(\chi_{E_j} \mathbf{1}) = \psi_i(\mathbf{1}) \leqslant \|\psi_i\|,$$

значит,

$$\sum_{j=1}^{N} |\lambda(E_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{N} |\lambda_i(E_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} \|\psi_i\| \leqslant 4 \cdot \|\psi\|.$$

Теперь нам надо найти такую РОА МАОП μ, что $\mu(T)(a) = \lambda(T)(a)$. Без ограничения общности это достаточно сделать для положительной $\lambda = \lambda_i$.

Пусть в пространстве T: F обозначает произвольное замкнутое множество, G — произвольное открытое множество, E — произвольное подмножество. Определим, полагая

$$\mu_1(F)(a^*a) = \inf_{G\supset F} \lambda(G)(a^*a), \qquad \mu_2(E)(a^*a) = \sup_{F\subset E} \mu_1(F)(a^*a),$$

и затем продолжая по линейности. Точнее: в силу сепарабельности T можно взять конфинальную последовательность $\{G_i\}$. Поскольку единичный шар сопряженного пространства слабо компактен, то можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\lambda(G_{i_k})$. Ее предел ψ — положительный функционал на A, обладающий inf-свойством на положительных элементах. В частности, он не зависит от выбора $\{G_i\}$ и $\{G_{i_k}\}$. Аналогично для sup.

Эти функции множеств неотрицательные и неубывающие μ_1 и μ_2. Пусть G_1 — открытое, а F_1 — замкнутое. Тогда, если $G \supset F_1 \setminus G_1$, то $G_1 \cap G \supset F_1$ и $\lambda(G_1) \leqslant \lambda(G_1) + \lambda(G)$, так что $\mu_1(F_1) \leqslant \lambda(G_1) + \lambda(G)$. Поскольку G — произвольное открытое множество, содержащее $F_1 \setminus G_1$, мы получаем

$$\mu_1(F_1) \leqslant \lambda(G_1) + \mu_1(F_1 \setminus G_1).$$

Если F — замкнутое множество, то из этого неравенства, заставляя G_1 пробегать все открытые множества, содержащие $F \cap F_1$, получаем, что

$$\mu_1(F_1) \leqslant \mu_1(F \cap F_1) + \mu_2(F_1 \setminus F).$$

Если E — произвольное подмножество T и F_1 пробегает замкнутые подмножества E, то из предыдущего неравенства следует, что

$$\mu_2(E) \leqslant \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E \setminus F). \tag{6}$$

Далее мы покажем, что для произвольного множества E в T и произвольного замкнутого множества F в T выполнено

$$\mu_2(E) \geqslant \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E \setminus F). \tag{7}$$

Чтобы убедиться в этом, обозначим через F_1 и F_2 дизъюнктные замкнутые множества. Поскольку T нормально, имеются дизъюнктнве окрестности G_1 и G_2 множеств F_1 и F_2, соответственно. Если G — произвольная окрестность $F_1 \cup F_2$, то $\lambda(G) \geqslant \lambda(G \cap G_1) + \lambda(G \cap G_2)$, так что

$$\mu_1(F_1 \cap F_2) \geqslant \mu_1(F_1) + \mu_2(F_2).$$

Пусть теперь E и F — произвольные множества в T, причем F замкнуто, и пусть F_1 пробегает замкнутые подмножества $E \cap F$, а F_2 — замкнутые подмножества $E \setminus F$. Тогда предыдущее неравенство доказывает (7). Из (6) и (7) получаем

$$\mu_2(E) = \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E \cap (T \setminus F)) \tag{8}$$

для любого E в T и замкнутого F. Функция μ_2 определена на алгебре всех подмножеств T и, как следует из (8), любое замкнутое множество F является μ_2-подмножеством. Если μ — ограничение μ_2 на алгебру, порожденную замкнутыми множествами, то из леммы 3.4 следует, что μ аддитивна на этой алгебре. Из определений μ_1 и μ_2 ясно, что $\mu_1(F) = \mu_2(F) = \mu(F)$, если F замкнуто, и значит, $\mu(E) = \sup_{F\subset E} \mu(F)$. Это показывает, что μ *-слабо регулярна и, поскольку $\|\mu(T)\| < \infty$, то μ — РОА МАОП.

Наконец, по определению, $\mu(S)(a) = \lambda(S)(a) = \psi(a) = \varphi(a)$ для всех $a \in \Gamma(\mathcal{A})$. □

4. Скрученно-инвариантные МАОП

Большая часть следующих рассуждений верна для различных представлений алгебр операторными полями, но мы ограничимся теперь случаем групповой C^*-алгебры дискретной группы и сосредоточимся на следующем важном представлении сечениями, принадлежащем Даунсу и Хофманну [6, Corollaries 8.13, 8.14].

Пусть Z — центр C^*-алгебры A, $\widehat{Z}$ — пространство его максимальных идеалов, снабженное обычной топологией. Если $I \in \mathcal{P} := \mathrm{Prim}(A)$ (пространство ядер неприводимых унитарных представлений), то $Z \cap I \in \widehat{Z}$ (это следует из того, что если взять неприводимое представление с ядром I, то его ограничение на Z задает гомоморфизм $Z \to \mathbb{C}$, а следовательно, $Z \cap I$ — максимальный идеал). Получаем отображение $f : \mathcal{P} \to \widehat{Z}$. Положим $T = f(\mathcal{P})$. Для каждого $x \in T$ рассмотрим идеал $I_x := \cap I$, $f(I) = x$, (*идеал Глимма*) и рассмотрим поле алгебр A/I_x. Возникает отображение $a \mapsto \{x \mapsto a+I_x\}$ из алгебры A в алгебру сечений указанного поля. Важный результат, полученный в работе [6], состоит в том, что это отображение является изоморфизмом. При этом отображение $f : \mathcal{P} \to T$ универсально по отношению к непрерывным отображениям $g : \mathcal{P} \to S$ в хаусдорфовы пространства, т.е. любое такое отображение можно представить в виде $h \circ f$ для некоторого непрерывного $h : T \to S$. В случае унитальной алгебры T компактно.

Теперь рассмотрим счетную дискретную группу G и ее автоморфизм ϕ. Пусть $A = C^*(G)$. Рассмотрим скрученное действие G на A:

$$g[a] = \delta_g * a * \delta_{\phi(g^{-1})},$$

где δ_g — дельта-функция с носителем в g, и аналогично на функционалах. Это же действие определено и на A/I, поскольку идеалы инвариантны при сдвигах.

Определение 4.1. Размерность $R_*(\phi)$ пространства скрученно инвариантных функционалов на $C^*(G)$ называется *обобщенным числом Райдемайстера ϕ*. Таким образом, $R_*(\phi)$ является размерностью пространства скрученно-инвариантных элементов алгебры Фурье-Стилтьеса $B(G)$.

Напомним, что алгебра Фурье-Стилтьеса дискретной группы G определяется одним из трех эквивалентных способов (см. [3]): (1) пространство коэффициентов унитарных представлений G (функций вида $g \mapsto \langle \rho(g)\xi, \eta\rangle$, $\xi, \eta \in H_\rho$, где H_ρ — пространство унитарного представления ρ); (2) пространство конечных линейных комбинаций положительно определенных функций на G; (3) пространство непрерывных линейных функционалов на $C^*(G)$. Поскольку все это — пространства функций на группе G, то коммутативное умножение вводится поточечно.

Определение 4.2. Идеал (Глимма) I называется *обобщенной неподвижной точкой $\widehat{\phi}$*, если линейная оболочка элементов $b - g[b]$ не плотна в $A_I = A/I$, т.е. ее замыкание K_I не совпадает с A_I. Множество всех обобщенных неподвижных точек обозначим через GFP.

Если $\#GFP < \infty$, то скрученно инвариантные РОА МАОП сосредоточены в этих точках. Для доказательства этого факта опишем действие G на РОА МАОП более подробно. Действие G на мерах определяется при помощи отождествления мер и функционалов на A.

Лемма 4.3. *Если μ отвечает скрученно-инвариантному функционалу, то для любого борелевского $E \subset T$ функционал $\mu(E)$ является скрученно-инвариантным.*

Доказательство. Это немедленно следует из *-слабой регулярности. Действительно, пусть $a \in A$, $g \in G$ и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, а U и F — из леммы 3.5, причем для a и $g[a]$ одновременно. Выберем такую непрерывную функцию $f : T \to [0,1]$, что $f|_F = 1$ и $f|_{T\setminus U} = 0$. Тогда

$$\begin{gathered}|\mu(E)(a - g[a])| = |\mu(E \setminus F)(a) + \mu(F)(a) - \mu(E \setminus F)(g[a]) - \mu(F)(g[a])| \leqslant \\ \leqslant |\mu(F)(a) - \mu(F)(g[a])| + 2\varepsilon = |\mu(F)(fa) - \mu(F)(g[fa])| + 2\varepsilon = \\ = |\mu(U)(fa) - \mu(U \setminus F)(fa) - \mu(U)(g[fa]) + \mu(U \setminus F)(g[fa])| + 2\varepsilon \leqslant \\ \leqslant |\mu(U)(fa) - \mu(U)(g[fa])| + 4\varepsilon = |\mu(T)(fa) - \mu(T)(g[fa])| + 4\varepsilon = 4\varepsilon.\end{gathered}$$

□

Лемма 4.4. *Для любого скрученно-инвариантного функционала φ на $C^*(G)$ соответствующая мера μ сосредоточена на множестве GFP обобщенных неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть $\|\mu\| = 1$. Предположим противное: существует элемент $a \in A$, $\|a\| = 1$, обращающийся в нуль на неподвижных точках, причем $\varphi(a) \neq 0$. Пусть $\varepsilon := |\varphi(a)| > 0$. В каждой точке $t \notin GFP$ мы можем найти такие элементы $b_t^i \in A$, $g_t^i \in G$, $i = 1, \dots k(t)$, что

$$\|a(t) - \sum_{i=1}^{k(t)} (g_t^i[b_t^i](t) - b_t^i(t))\| < \varepsilon/4.$$

Тогда найдется такая окрестность U_t, что для $s \in U_t$ выполнено

$$\|a(s) - \sum_{i=1}^{k(t)} (g_t^i[b_t^i](s) - b_t^i(s))\| < \varepsilon/2.$$

Выберем конечное подпокрытие $\{U_{t_j}\}$, $j = 1, \dots, n$, из $\{U_t\}$ и борелевское разбиение $E_1, \dots, E_n$, подчиненное этому подпокрытию. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)(a) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) \left(a - \sum_{i=1}^{k(t_j)} (g_{t_j}^i[b_{t_j}^i] - b_{t_j}^i) \right) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k(t_j)} \mu(E_j)(g_{t_j}^i[b_{t_j}^i] - b_{t_j}^i).\end{aligned}$$

По лемме 4.3 каждое слагаемое во втором члене равно нулю. Абсолютное значение первого члена не превосходит $\sum_j \|\mu(E_j)\|\varepsilon/2 \leqslant \|\mu\| \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon/2$. Это противоречит тому, что $|\varphi(a)| = \varepsilon$. □

Поскольку функционал φ на A_I является скрученно-инвариантным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi \supset K_I$, то размерность пространства этих функционалов равняется размерности пространства функционалов на A_I/K_I и конечна тогда и только тогда, когда пространство A_I/K_I конечномерно. В этом случае размерность пространства скрученно-инвариантных функционалов на A_I равняется $\dim(A_I/K_I)$.

Определение 4.5. *Обобщенным числом* $S_*(\phi)$ *неподвижных точек* $\widehat{\phi}$ на спектре Глимма называется
$$S_*(\phi) := \sum_{I \in GFP} \dim(A_I/K_I).$$

Поскольку функционалы, отвечающие мерам, сосредоточенным в различных точках, являются линейно независимыми (пространство хаусдорфово), то в силу проведенных рассуждений верна следующая теорема.

Теорема 4.6 (слабая обобщенная типа Бернсайда)**.**
$$R_*(\phi) = S_*(\phi),$$
если хотя бы одно из них конечно.

Список литературы

[1] А. А. Кириллов. *Элементы теории представлений.* Наука, Москва, 1978.

[2] А. Л. Фельштын. Число Райдемайстера любого автоморфизма гиперболической по Громову группы бесконечно. *Записки научных семинаров ПОМИ РАН* **279**, N 6 (Геом. и топол.), 229–240, 250, 2001.

[3] Ж. Диксмье. *C*-алгебры и их представления.* Мир, Москва, 1974.

[4] А. Мерфи. *C^*-алгебры и теория операторов.* Факториал Пресс, Москва, 1997.

[5] J. Arthur, L. Clozel. *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[6] J. Dauns, K. H. Hofmann. *Representations of rings by continuous sections*, volume 83 of *Mem. Amer. Math. Soc.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[7] J. M. G. Fell. The structure of algebras of operator fields. *Acta Math.* **106**, 233–280, 1961.

[8] A. Fel'shtyn. Dynamical zeta functions, Nielsen theory and Reidemeister torsion. *Mem. Amer. Math. Soc.* **147**, N 699, xii+146, 2000.

[9] A. Fel'shtyn, E. Troitsky. A twisted Burnside theorem for countable groups and Reidemeister numbers. В: K. Consani, M. Marcolli, Yu. Manin, editors, *Proc. Workshop Noncommutative Geometry and Number Theory (Bonn, 2003)*, стр. 000–000. Vieweg, Braunschweig, 2004. (Preprint MPIM2004-65).

[10] A. Fel'shtyn, E. Troitsky, A. Vershik. Twisted Burnside theorem for type II_1 groups: an example. Preprint 85, Max-Planck-Institut für Mathematik, 2004.

[11] A. Grothendieck. Formules de Nielsen-Wecken et de Lefschetz en géométrie algébrique. В: *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965-66. SGA 5*, volume 569 of *Lecture Notes in Math.*, стр. 407–441. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[12] B. Jiang. *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, volume 14 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[13] G. K. Pedersen. *C*-Algebras and Their Automorphism Groups.* Academic Press, London – New York – San Francisco, 1979.

[14] S. Shokranian. *The Selberg-Arthur trace formula.* Springer-Verlag, Berlin, 1992. Based on lectures by James Arthur.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва 119992

E-mail address: `troitsky@mech.math.msu.su`

URL: `http://mech.math.msu.su/~troitsky`