

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Е.В. Троицкий

Степень отображения и ее применения

Учебное пособие по курсу
“Прикладные проблемы геометрии”

Москва 1996 год

Московский государственный университет им. М.В.
Ломоносова
механико-математический факультет

Е.В.Троицкий. Степень отображения и ее применение.

Подписано в печать 15.6.1996 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 3,5 п.л.
Заказ Тираж 100 экз.

Издательство механико-математического факультета МГУ
г. Москва, Ленинские горы.
Лицензия на издательскую деятельность ЛР №020806, от 23.08.1993г.

Отпечатано на типографском оборудовании
механико-математического факультета и
Франко-русского центра им. А.М. Ляпунова.

Оглавление

1. Гомотопии	4
2. Степень отображения: определение и первые применения	5
3. Степень и интеграл	10
4. Степень векторного поля на гиперповерхности	11
5. Индекс особой точки векторного поля	15
6. Теорема Пуанкаре – Бендиксона	19
7. Индекс пересечения	21
8. Число Лефшеца и его применения	25
9. Вполне непрерывные векторные поля и их вращение	28
10. Алгебраическое число неподвижных точек вполне непрерывного векторного поля	32
11. Классификационная теорема	33
12. Общий принцип Лере — Шаудера	35
13. Теорема о произведении вращений и ее применение к слабо связанным уравнениям	36
14. Нечетные поля на сферах	40
15. О свойствах собственных пространств линейных операторов в банаховых пространствах	43
16. Вращение линейного поля	49

1. Гомотопии

Определение. Пусть M и N — гладкие многообразия (без края для гладкой гомотопии), $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ — гладкие отображения. *Гомотопией* между f_0 и f_1 называется (гладкое, непрерывное, ...) отображение $F : M \times I \rightarrow N$, $I = [0, 1]$, причем

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x).$$

В этой ситуации f_0 и f_1 называются *гомотопными*: $f_0 \sim f_1$.

Теорема 1. Пусть M и N — гладкие компактные многообразия, $f, g : M \rightarrow N$ — непрерывные отображения. Тогда для любой римановой метрики на N существует такое число $\varepsilon > 0$, что из условия $\rho(f, g) = \sup_{x \in M} \rho_0(f(x), g(x)) < \varepsilon$ (где $\rho_0(y_1, y_2)$ — нижняя грань множества длин кусочно-гладких кривых, соединяющих y_1 и y_2) следует, что отображения f и g гомотопны.

Доказательство. Так как N компактно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что если $p, q \in N$ и $\rho_0(p, q) < \varepsilon$, то существует единственная геодезическая, соединяющая эти точки и лежащая в малой окрестности. Это утверждение доказывается в основном курсе дифференциальной геометрии (см. [5, стр. 349]). Определим отображение $F : M \times I \rightarrow N$, поставив в соответствие паре (x, t) точку на указанной единственной геодезической от $f(x)$ к $g(x)$, делящую эту геодезическую в отношении $t : (1 - t)$. Теорема о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных условий дает непрерывность F . $\square$

Следствие 1. Пусть $f : M \rightarrow N$ непрерывно, где M и N — гладкие. Тогда f гомотопна гладкому $g : M \rightarrow N$.

⁰Автор выражает глубокую благодарность слушателям А. Лисице и В. Шабату за помощь в переработке первого варианта конспекта.

Следствие 2. Если гладкие отображения $f, g : M \rightarrow N$ гомотопны, то они и гладко гомотопны.

2. Степень отображения: определение и первые применения

Напомним, что многообразие называется ориентированным, если для него существует атлас с положительными якобианами функций перехода (*ориентирующий атлас*).

Задача 1. Доказать, что лента Мебиуса — неориентируемое многообразие.

Определение. Точка $x \in M$ называется *регулярной точкой* отображения многообразий $f : M \rightarrow N$, если отображение $df|_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ сюръективно.

Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения $f : M \rightarrow N$, если любой $x \in f^{-1}(y)$ — регулярная точка.

В курсе дифференциальной геометрии доказывается, что полный прообраз регулярного значения является подмногообразием.

Пусть $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение замкнутых (то есть компактных без края) связных ориентированных многообразий одной размерности. В этом случае полный прообраз регулярного значения будет просто конечным числом точек, а df в регулярных точках — просто изоморфизмом касательных пространств.

Определение. *Степенью* f по отношению к регулярному значению $y_0 \in N$ называется

$$\deg f = \deg(f, y_0) := \sum_{f(x_i)=y_0} \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right) = \sum \varepsilon(f, y_0, x_i).$$

Очевидно, что это определение не зависит от выбора ориентирующих координат.

Теорема 2. *Степень отображения*

(а) не зависит от выбора правильного значения y_0 и

(б) не меняется при гомотопиях.

Доказательство. Сведем (а) к (б). Пусть y_0 и y_1 — два правильных значения f .

Задача 2. Существует такое непрерывное семейство $\varphi_t : M \rightarrow M$ диффеоморфизмов, что $\varphi_0 = \text{Id}$, а $\varphi_1(y_0) = y_1$ (здесь мы пользуемся связностью).

Тогда $f \sim \varphi_1 \circ f$ и обоих отображений точка y_1 регулярна. С другой стороны

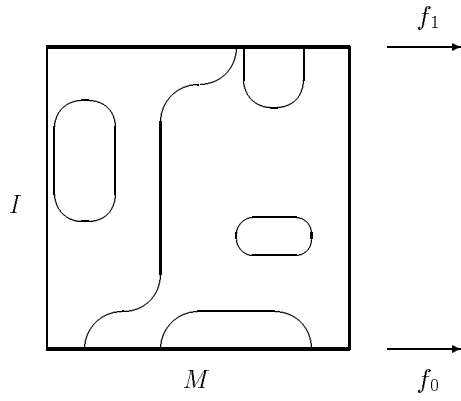
$$\deg(\varphi_1 \circ f, y_1) = \deg(f, y_0),$$

и если (по (б)) $\deg(\varphi_1 \circ f, y_1) = \deg(f, y_1)$, то (а) доказано.

(б). Пусть $I = [0, 1]$, и $F : M \times I \rightarrow N$, так что $F|_{M \times 0} = f_0$, $F|_{M \times 1} = f_1$.

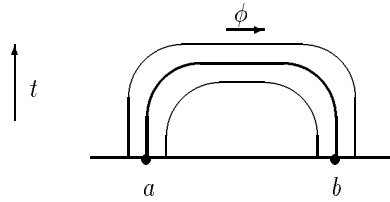
Пусть y — регулярное значение. По теореме Сарда, регулярные значения гладких отображений образуют открытое и плотное подмножество в N . Значит, можно найти регулярное значение y' в некоторой достаточно малой окрестности y , являющееся регулярным значением одновременно f_0, f_1 и F , причем такое, что степень этих отображений в y' такая же, как в y . Будем считать $y' = y$.

Множество $F^{-1}(y)$ будет подмногообразием в $M \times I$ размерности 1; из компактности можно заключить, что оно будет представлять из себя объединение некоторого числа окружностей и некоторого числа отрезков, причем концы отрезков будут лежать на краях $M \times 0$ и $M \times 1$ (наборы этих концов и будет представлять собой полные прообразы y).



Окружности не будут иметь точек пересечения с этими краями, и, следовательно, никак не повлияют на степень. Отрезки могут быть двух типов: с концами на одной или на разных компонентах края.

Будем использовать ориентирующий атлас для M , и возьмем координату t на I . Рассмотрим один из отрезков L с концами a и b . Тогда имеем карту $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, t)$ в окрестности a , а в окрестности b — карту $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n, t)$.



По теореме Сарда, существует окрестность V точки y , состоящая только из регулярных значений. Тогда среди связных компонент $F^{-1}(V)$ будет содержаться некоторая окрестность отрезка L . Зададим в этой окрестности карту (координаты) $(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n, \phi)$, где $(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)$ — карта на V , а ϕ — параметр вдоль отрезка.

Положим $\varepsilon(a) = \varepsilon(f_\tau, y, a)$, где τ выбирается в зависимости от того, на какой части границы лежит a ; аналогично определим

$\varepsilon(b)$. Тогда

$$\varepsilon(a) = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)}{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)} = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)}$$

$$\varepsilon(b) = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)}{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)} = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)}.$$

Так как мы выбрали ориентирующий атлас, имеем равенство

$$\operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, t)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n, \phi)} \Big|_a = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n, t)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n, \phi)} \Big|_b.$$

Но так как $\frac{\partial t}{\partial y_\gamma^i} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, t)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n, \phi)} \Big|_a &= \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial t}{\partial \phi} \right) \Big|_a = \\ &= \varepsilon(a) \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial t}{\partial \phi} \right) \Big|_a \\ \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n, t)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n, \phi)} \Big|_b &= \operatorname{sgn} \det \frac{\partial(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)}{\partial(y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n)} \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial t}{\partial \phi} \right) \Big|_b = \\ &= \varepsilon(b) \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial t}{\partial \phi} \right) \Big|_b \end{aligned}$$

Если отрезок имел оба конца на одной части границы, то $\frac{\partial t}{\partial \phi}$ имеет разные знаки на концах, а если на разных — одинаковые. Значит, отрезок с концами на одной части даст два взаимно уничтожающихся члена в сумму для степени соответствующей функции, а отрезок с концами на разных частях даст два одинаковых члена в обе суммы. Теорема доказана. $\square$

Задача 3. Определить степень в неориентируемом случае (как элемент $\mathbf{Z}_2$) и доказать аналог предыдущей теоремы.

В некоторых случаях верно и обратное следствие: из равенства степеней следует гомотопность.

Теорема 3. Два гладких отображения $f, g : M \rightarrow S^n$ замкнутого ориентированного n -мерного многообразия в n -мерную сферу гомотопны в том и только в том случае, когда их степени совпадают.

Задача 4. Доказать теорему в случае $n = 1$.

Лемма 1. Пусть X — нормальное топологическое пространство (например, многообразие), $F \subset X$ — замкнутое подмножество, а $f : F \rightarrow \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на множестве F , и $|f(x)| \leq k$ при $\forall x$. Тогда f продолжается до непрерывной g :

$$g : X \rightarrow \mathbf{R}^1, \quad g|_F = f, \quad |g(x)| \leq k \text{ при } \forall x \in X.$$

Доказательство теоремы. Мы дадим набросок доказательства по индукции, предполагая, что в случае $n = 1$ теорема доказана. Подробности можно найти в [6, стр. 168–172].

В одну сторону утверждение теоремы уже доказано в теореме 2 (б). Пусть $y_0 \in S^n$ — регулярное значение f и g , имеющих одинаковую степень, а U — его малая окрестность, состоящая из регулярных значений. Пусть S_0 — малая сфера, окружающая y_0 в U . Нам надо определить непрерывное отображение $F : M \times I \rightarrow S^n$, которое, если мы будем его рассматривать как семейство $F_t : M \rightarrow S^n$, должно удовлетворять условиям $F_0 = f$ и $F_1 = g$. То есть F уже определено на основаниях цилиндра, а нам надо его продолжить до непрерывного отображения на всем цилиндре. Для этого соединим гладкими путями в цилиндре $M \times I$ попарно все $(+)$ и $(-)$ прообразы y_0 в основаниях цилиндра. Поскольку степени f и g равны, то это можно сделать. Пусть a_k и b_k — концы такого пути, а S_a и S_b — соответствующие прообразы S_0 . По соображениям размерности мы можем выбрать пути так, чтобы они и тонкие трубки, их охватывающие, не пересекались. По предположению индукции мы можем продолжить

отображение (степени 1) на некоторый цилиндр (диффеоморфный $I \times S^{n-1}$), лежащий в трубке, охватывающий путь и имеющий S_a и S_b своими основаниями, а затем, по радиусам, на заполненный цилиндр. Пусть K — объединение внутренностей цилиндров и их оснований, тогда на $\partial(M \times I \setminus K)$ отображение F уже определено, причем значения его лежат в дополнении в S^n к открытому шару, ограниченному S_0 , а это пространство диффеоморфно $\mathbf{R}^n$. Вспоминая, что по теореме Уитни ([5, стр. 143]) можно считать $M \times I \subset \mathbf{R}^k$, и применяя покоординатно предыдущую лемму (мы применяем ее, таким образом, в простейшем случае евклидова пространства), получим продолжение F с $\partial(M \times I \setminus K)$ на $M \times I \setminus K$. Поскольку на $\partial(M \times I \setminus K)$ продолжение и уже построенное ранее отображение согласованы, то получили требуемое непрерывное продолжение. $\square$

3. Степень и интеграл

Пусть M — замкнутое ориентируемое многообразие размерности n , и Ω — дифференциальная форма степени n (то есть кососимметричный тензор ранга $(0, n)$) на M . Пусть в локальных координатах форма имеет вид $\Omega = \phi(y) dy_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dy_\alpha^n$.

Дифференциальную форму можно определить как n -линейный функционал на касательном пространстве к каждой точке. Пусть $f : N \rightarrow M$ — отображение многообразий одинаковой размерности; тогда на N определена форма $f^*\Omega$, где по определению

$$f^*\Omega(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \Omega(df|_p(\vec{v}_1), \dots, df|_p(\vec{v}_n)).$$

(Из определения непосредственно видно, что в точках, в которых якобиан f обращается в нуль, обращается в нуль и $f^*\Omega$).

Теорема 4.

$$\int_N f^*\Omega = (\deg f) \int_M \Omega.$$

Доказательство. Выберем локальные карты

$$(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n), \quad (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n),$$

на N и на M , соответственно. Имеем

$$\begin{aligned} f^*\Omega(x) &= \phi(f(x))d(y_\alpha^1(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n), \dots, y_\alpha^n(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)) = \\ &= \phi(f(x))\det\left(\frac{\partial y_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\right)dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n. \end{aligned}$$

Задача 5. Доказать последнее равенство.

Пусть $M = K \cup R$, где K — множество критических, а R — регулярных значений. Разобьем R на атлас из достаточно маленьких карт U_α так, что прообразы одной карты не пересекаются и f на каждой из компонент прообраза есть диффеоморфизм.

Пусть $f^{-1}U_\alpha = V_1 \cup \dots \cup V_r$. Рассматривая диффеоморфизм как гладкую замену переменных в интеграле, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{V_s} f^*\Omega &= \int_{V_s} \phi(f(x))\det\left(\frac{\partial y_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\right)dx_\beta^1 \wedge \dots \wedge dx_\beta^n = \\ &= \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial y_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\right) \int_{U_\alpha} \Omega. \end{aligned}$$

Суммируя, получим

$$\int_{f^{-1}U_\alpha} f^*\Omega = \deg f \int_{U_\alpha} \Omega.$$

Значит, $\int_{f^{-1}R} f^*\Omega = \deg f \int_R \Omega = \deg f \int_M \Omega$, так как множество критических точек K имеет меру нуль. Осталось показать, что интеграл от $f^*\Omega$ по $f^{-1}K$ равен нулю. Это так, поскольку известно, что мера множества некритических точек в прообразе критических значений равна нулю; в критических же точках обращается в нуль $f^*\Omega$. $\square$

4. Степень векторного поля на гиперповерхности

Пусть в области $U \subset \mathbf{R}^n$ с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ задано гладкое векторное поле $\vec{\xi} = (\xi^i(x))$, $i = 1, \dots, n$. Если поле $\vec{\xi}$ не обращается нигде в нуль, то мы можем определить *гауссово сферическое отображение* $\Gamma : U \rightarrow S^{n-1}$, где $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ — единичная сфера:

$$\Gamma(x) := \frac{\vec{\xi}(x)}{|\vec{\xi}(x)|}.$$

Возьмем замкнутую гиперповерхность $Q \subset U$. Гауссово отображение при ограничении задает отображение $\Gamma : Q \rightarrow S^{n-1}$. Степень этого отображения называется *степенью векторного поля $\vec{\xi}$ на гиперповерхности Q* (она будет обозначаться $\deg_Q \vec{\xi}$).

На сфере $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ определена *форма объема* — замкнутая дифференциальная форма Ω ранга $n - 1$, имеющая вид

$$\Omega = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где нормировочный множитель γ_n подобран из условия

$$\int_{S^{n-1}} \Omega = 1.$$

Пусть гиперповерхность Q задана локально в параметрическом виде

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 5. Для любого векторного поля $\vec{\xi}$ и замкнутой гиперповерхности Q степень $\vec{\xi}$ на Q равна $\int_Q \Gamma^* \Omega$ (где Γ — гауссово сферическое отображение), и равна

$$\frac{1}{\gamma_n} \int_Q \frac{1}{|\vec{\xi}|^n} \det \begin{pmatrix} \xi^1 & \dots & \dots & \xi^n \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^1} & \dots & \dots & \frac{\partial \xi^n}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial u^{n-1}} & \dots & \dots & \frac{\partial \xi^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix} du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}.$$

Доказательство. В силу выбора γ_n и предыдущей теоремы достаточно лишь проверить явный вид $\Gamma^*(\Omega)$. $\square$

Задача 6. Проверить явный вид $\Gamma^*(\Omega)$.

Задача 7. Пусть $|\vec{\xi}| = 1$ и $\vec{\xi}$ является внешней нормалью к Q . Доказать, что

$$\gamma_n \Gamma^* \Omega = K d\sigma = K \sqrt{g} du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1},$$

где K — гауссова кривизна, а g — определитель первой квадратичной формы на Q .

Теорема 6.

$$\int_Q K d\sigma = \gamma_n \cdot \deg \Gamma. \quad \square$$

Задача 8. Доказать эту теорему.

Рассмотрим теперь поверхность в трехмерном пространстве и поле внешних нормалей на ней. Будем считать, что северный и южный полюса сферы y_0 и y_0^* — регулярные значения Γ (этого можно добиться поворотом оси z сферы).

Лемма 2. Рассмотрим "высоту" $\varphi(P)$, равную z -координате P . Все критические точки φ невырождены и их множество совпадает с $\Gamma^{-1}(y_0) \cup \Gamma^{-1}(y_0^*)$.

Доказательство. Поскольку условие $\text{grad } \varphi(P) = 0$ выполняется в тех, и только в тех точках P , где направление оси Oz перпендикулярно Q , то множество критических точек совпадает с $\Gamma^{-1}(y_0) \cup \Gamma^{-1}(y_0^*)$.

Задача 9. (=теореме из программы третьего курса) В точках $\Gamma^{-1}(y_0)$ якобиан Γ совпадает с

$$\det \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right\| = \det \text{He}(\varphi) = K.$$

В точках $\Gamma^{-1}(y_0^*)$ надо заменить $\varphi \leftrightarrow -\varphi$. Значит, по условию, точки не вырождены. $\square$

Таким образом, $K \neq 0$ — условие невырожденности для $\Gamma^{-1}(y_0) \cup \Gamma^{-1}(y_0^*)$. Поскольку для $(n - 1)$ -мерной поверхности в $\mathbf{R}^n$

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} \right\| = (-1)^{n-1} \det \left\| \frac{\partial^2 (-\varphi)}{\partial u^i \partial u^j} \right\|,$$

а у нас $n = 3$, то знаки якобианов Γ во всех точках $\Gamma^{-1}(y_0) \cup \Gamma^{-1}(y_0^*)$ совпадают со знаками гауссовой кривизны K . Учитывая, что мы считали прообразы сразу для двух точек, получаем следующее утверждение.

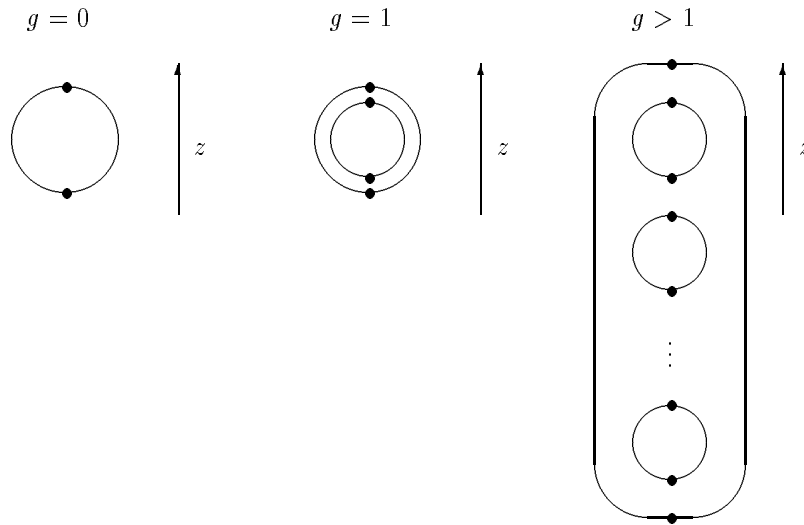
Лемма 3. Пусть $\{p_j\}$ — все критические точки функции φ . Положим

$$\alpha(p_j) := \begin{cases} 1, & \text{если } p_j \text{ — точка минимума или} \\ & \text{максимума высоты,} \\ -1, & \text{если } p_j \text{ — седловая точка.} \end{cases}$$

(то есть знак гауссовой кривизны). Тогда

$$2 \deg \Gamma = \sum_{p_j} \alpha(p_j).$$

Рассмотрим поверхности, диффеоморфные сферам с приклеенными ручками (на самом деле все замкнутые ориентируемые поверхности таковы, но это в данном курсе не обсуждается). Вложим их в трехмерное пространство так, чтобы все критические точки функции высоты оказались на одной прямой, параллельной оси z .



При таком вложении имеется один минимум, один максимум и $2g$ седел. Таким образом,

$$2 \deg \Gamma = \frac{1}{2\pi} \int K d\sigma = 2 - 2g.$$

Задача 10. (теорема из программы третьего курса)

- 1). $K = R/2$, где R — скалярная кривизна.
 - 2). $\int_Q R d\sigma$ не меняется при малых вариациях метрики.
 - 3). Любые две римановы метрики (как скалярные произведения в касательных пространствах) линейно гомотопны.
- Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 7. (Гаусс – Бонне). *Для любой римановой метрики на поверхности с g ручками*

$$\frac{1}{4\pi} \int_Q R d\sigma = 2 - 2g. \quad \square$$

5. Индекс особой точки векторного поля

Определение. Рассмотрим поле $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x)$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Точка x_0 называется *особой точкой*, если $\vec{\xi}(x_0) = \vec{0}$. Особая точка называется *изолированной особой точкой* (ИОТ), если $\vec{\xi}$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности x_0 . Особая точка называется *невырожденной особой точкой* (НОТ), если $\det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right) \neq 0$.

Задача 11. Доказать, что невырожденная особая точка всегда изолирована.

Определение. *Корнями* НОТ называются собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы $\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right)$, а *индексом* НОТ называется

$$\operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right) = \operatorname{sgn} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n).$$

Задача 12. Убедиться, что $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbf{R}$.

Заметим, что если $\xi^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, то индекс

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right) &= \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right) = \\ &= (-1)^{i(x_0)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i(x_0)$ равно числу (-1) в нормальном виде билинейной формы $d^2 f|_{x=x_0}$.

Пусть $Q_\varepsilon = S^{n-1}$ — сфера столь малого радиуса $\varepsilon > 0$, окружающая ИОТ x_0 , что внутри нее содержится лишь одна особая точка (x_0) , и $\vec{\xi}|_{Q_\varepsilon} \neq \vec{0}$.

Определение. *Индексом* ИОТ (возможно вырожденной) называется степень соответствующего Q_ε гауссова сферического отображения:

$$\text{ind}_{x_0} \vec{\xi} = \deg \Gamma_{x_0} = \deg \Gamma_{Q_\varepsilon}(\vec{\xi}).$$

Задача 13. Вывести из гомотопической инвариантности степени корректность определения (независимость от выбора Q_ε).

Теорема 8. *Если x_0 — HOT $\vec{\xi}$, то*

$$\deg \Gamma_{x_0} = \text{sgn det} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right),$$

то есть для HOT индекс HOT и индекс ИОТ совпадают.

Доказательство. Рассмотрим линеаризацию $\vec{\xi}$ (то есть первый член формулы Тейлора):

$$(\xi_1)^\beta(x) = \sum_\gamma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} (x^\gamma - x_0^\gamma)$$

и гомотопию

$$\vec{\xi}_t(x) = \vec{\xi}_1(x) + (1-t)\vec{\xi}_2(x),$$

где

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_1 + (\vec{\xi} - \vec{\xi}_1) = \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2, \quad \vec{\xi}_2 = o(\|\vec{\xi}_1\|).$$

Задача 14. Доказать, что в достаточно малой окрестности x_0 гомотопия не обращается в нуль.

При гомотопии $\deg \Gamma_{x_0}$ и линейная часть $\vec{\xi}$ не меняются, т.е. не меняются обе части доказываемого равенства. Следовательно, теорему достаточно доказать для невырожденного линейного поля. Но у него каждая точка имеет ровно один прообраз и степень гауссова отображения совпадает со знаком детерминанта этого линейного изоморфизма, а его матрица, в свою очередь, совпадает с его матрицей Якоби.

□

Теорема 9. Пусть $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x)$ — векторное поле в $\mathbf{R}^n$ с изолированными особенностями $x_1, \dots, x_m$, а замкнутая ориентированная гиперповерхность Q не проходит через них и ограничивает область D , в которой лежат $y_1, \dots, y_k$ (из числа $x_1, \dots, x_m$). Тогда

$$\deg_Q \vec{\xi} = \deg \Gamma_Q = \sum_{i=1}^k \text{ind } y_i \vec{\xi}.$$

Доказательство. Окружим y_i малыми сферами $Q_i = \partial B_i$, $B_i \subset D$ и в B_i единственной особой точкой является y_i . Пусть D' — это D без внутренностей B_i , так что с учетом ориентации,

$$\partial D' = Q \cup (-Q_1) \cup \dots \cup (-Q_k).$$

Поскольку $\vec{\xi}$ не обращается в нуль на D' , то определено гауссово сферическое отображение $\Gamma : D' \rightarrow S^{n-1}$. Поскольку нормированная форма объема Ω на S^{n-1} имеет максимальную размерность, то $d\Omega = 0$, а для ее прообраза при Γ :

$$d\Gamma^*\Omega = \Gamma^*d\Omega = 0.$$

Поэтому по общей формуле Стокса (где знак — в зависимости от правила согласования ориентаций):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D'} d\Gamma^*\Omega = \int_{\partial D'} \Gamma^*\Omega = \pm \left(\int_Q \Gamma^*\Omega + \sum_{i=1}^k \int_{-Q_i} \Gamma^*\Omega \right) = \\ &= \pm \left(\deg \Gamma_Q - \sum_{i=1}^k \text{ind } y_i \vec{\xi} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Определение. Пусть Q — гиперповерхность и $\vec{\xi}$ нигде ее не касается. В этом случае $\vec{\xi}$ называется *трансверсальным* по отношению к Q .

Задача 15. Доказать, что трансверсальное поле гомотопно полю единичных нормалей.

Лемма 4. *Для трансверсальной поверхности*

$$\deg_Q \vec{\xi} = \frac{1}{\gamma_n} \int_Q K d\sigma,$$

а если Q — сфера, то $\deg_Q \vec{\xi} = 1$.

Доказательство. В силу предыдущей задачи, достаточно провести вычисление для поля внешних нормалей, но для последнего (см. теорему 6):

$$\Gamma_{\vec{\xi}}^* \Omega = \frac{1}{\gamma_n} K d\sigma.$$

Для сферы же надо просто заметить, что Γ — ”тождественное” отображение. $\square$

Следствие 3. *Векторное поле $\vec{\xi}$ на $\mathbf{R}^n$, трансверсальное некоторой сфере S^{n-1} , обладает хотя бы одной особой точкой внутри сферы.*

Доказательство. Надо воспользоваться теоремой 9, предыдущей леммой и следующей задачей. $\square$

Задача 16. Определение индекса ИОТ можно применить и к неособой точке; показать, что так определенный индекс равен нулю.

6. Теорема Пуанкаре — Бендиксона

В этом параграфе рассматриваются векторные поля на плоскости.

Задача 17. Рассмотрим периодическую (замкнутую) траекторию поля $\vec{\xi}(x)$, т.е. такую замкнутую кривую, что поле касается ее в каждой точке. Доказать, что $\deg_Q \vec{\xi} = 1$, а следовательно, внутри имеется особая точка.

Пусть $\vec{\xi}$ направлено трансверсально внутрь некоторой замкнутой кривой Q . Пусть нам известно, что особые точки внутри Q должны быть выталкивающими (вспомните классификацию из курса обыкновенных дифференциальных уравнений). Тогда, поскольку в случае плоскости замкнутая кривая — окружность, из предыдущего следствия получаем, что внутри кривой

находится единственная выталкивающая точка x_0 (узел или фокус). Значит, траектория $\gamma(t)$, начавшись на Q , не сможет дойти до x_0 .

Определим множество $\omega^+(\gamma)$ предельных точек всех таких последовательностей $\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots\}$, что $t_i \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Задача 18. Доказать, что $\omega^+(\gamma)$ не содержит особых точек $\vec{\xi}$, замкнуто (рассмотрите диагональную последовательность), а следовательно, компактно.

Теорема 10. (Пуанкаре – Бендиксон). *При этих условиях определенное выше множество $\omega^+(\gamma)$ является периодической интегральной кривой поля $\vec{\xi}$, на которую кривая γ наматывается извне ("предельный цикл").*

Доказательство. Докажем, что множество $\omega^+(\gamma)$ вместе с любой точкой A содержит всю интегральную кривую $\tilde{\gamma}$, проходящую через A . Пусть

$$A = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(t_i),$$

тогда $\tilde{\gamma}$ состоит из пределов A_t подпоследовательностей вида $\gamma(t_i + t)$, $-\infty < t < \infty$. Действительно, при малом Δt

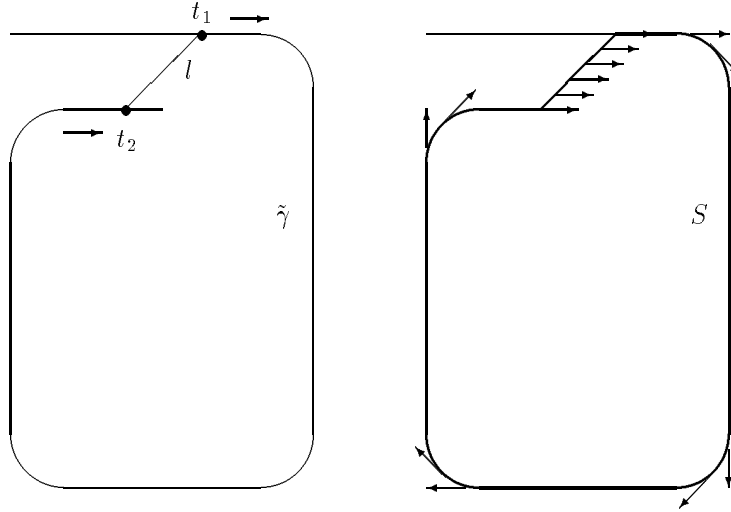
$$A - A_{\Delta t} = \gamma(t_i) + (A - \gamma(t_i)) - \gamma(t_i + \Delta t) - (A_{\Delta t} - \gamma(t_i + \Delta t)),$$

и всегда можно выбрать столь большое i , что

$$|A - \gamma(t_i)| < (\Delta t)^2, \quad |A_{\Delta t} - \gamma(t_i + \Delta t)| < (\Delta t)^2,$$

так что $A - A_{\Delta t} = \vec{\xi}(A) \cdot \Delta t + O((\Delta t)^2)$. Значит, $\tilde{\gamma} \subset \omega^+(\gamma)$.

Допустим, что траектория $\tilde{\gamma}$ не периодична. Пусть $\tilde{\gamma}(t_1)$ и $\tilde{\gamma}(t_2)$ — близкие в $\mathbf{R}^2$, но далекие по t точки. Такие точки всегда найдутся, так как $\tilde{\gamma}$ содержится в компактном множестве $\omega^+(\gamma)$. Соединим $\tilde{\gamma}(t_1)$ и $\tilde{\gamma}(t_2)$ малым трансверсальным отрезком l и рассмотрим $S = l \cup \tilde{\gamma}(t_1, t_2)$.



Тогда при $t \rightarrow +\infty$ траектория $\tilde{\gamma}$ заходит внутрь S и там остается. Значит, γ тоже заходит и остается. Значит, часть $\tilde{\gamma}$, оставшаяся вне S , не может принадлежать $\omega^+(\gamma)$. Получили противоречие.

Таким образом, $\tilde{\gamma}$ является периодической траекторией, $\gamma(t)$ подходит к ней извне. Кроме того, получается, что $\tilde{\gamma} = \omega^+(\gamma)$. $\square$

7. Индекс пересечения

Задача 19. Пусть $p + q = n$, $\dim P = p$, $\dim Q = q$, $\dim N = n$, P и Q — подмногообразия N . Пусть P и Q находятся в общем положении, то есть в любой точке пересечения $x \in P \cap Q$ касательные пространства P и Q порождают касательное пространство N . Доказать, что в этом случае $P \cap Q = \{x_1, \dots, x_m\}$ (состоит из конечного числа точек).

Пусть P , Q и N ориентированы, и в точке x_j обозначим ориентирующий касательный базис к P через τ_j^P , к Q — через τ_j^Q ,

к N — через τ_j^N . Определим

$$\operatorname{sgn} x_j(P \circ Q) := \begin{cases} +1, & \text{если } \operatorname{Or}(\tau_j^P, \tau_j^Q) = \operatorname{Or} \tau_j^N, \\ -1, & \text{если } \operatorname{Or}(\tau_j^P, \tau_j^Q) = -\operatorname{Or} \tau_j^N. \end{cases}$$

(Or обозначает ориентацию базиса).

Определение. *Индексом пересечения* в этом случае называется

$$P \circ Q := \sum_{j=1}^m \operatorname{sgn} x_j(P \circ Q)$$

(в неориентированном случае вычит по модулю 2 числа точек пересечения).

Задача 20. Показать, что $P \circ Q = (-1)^{pq} Q \circ P$.

Теорема 11. Пусть $Q_0 = i_0(Q)$, $Q_1 = i_1(Q)$, где i_0 и i_1 — гомотопные вложения. Тогда

$$Q_1 \circ P = Q_2 \circ P.$$

Набросок доказательства. Пусть

$$F : Q \times I \rightarrow N, \quad F|(Q \times 0) = i_0, \quad F|(Q \times 1) = i_1.$$

Задача 21. Используя теорему Сарда, доказать, что малым изменением F (а следовательно и изменением до гомотопного) можно добиться того, чтобы F было в общем положении с P , точнее,

$$F_*(T(Q \times I)) + TP = TN.$$

Тогда полный прообраз $F^{-1}(P)$ — одномерное многообразие с краем и доказательство завершается, как у теоремы 2. $\square$

Задача 22. Индекс пересечения двух подмногообразий евклидова пространства всегда равен нулю.

Задача 23. Замкнутое связное $(n-1)$ -мерное подмногообразие $\mathbf{R}^n$ всегда разделяет $\mathbf{R}^n$ на две части.

Пусть $\dim P = p$, а $N = T_*P$ — касательное расслоение P (называемое иногда многообразием линейных элементов). Напомним, что N как множество состоит из пар (x, ξ) , где $x \in P$, а $\xi \in T_x P$, т. е. касательный вектор. Топология и структура многообразия задается при помощи биективных отображений некоторых подмножеств N на открытые подмножества $\mathbf{R}^{2p}$, которые объявляются гомеоморфизмами и картами (так что $\dim N = 2p$). Именно, если (U, φ) — локальная карта на P , то в качестве указанного подмножества N берется множество пар (x, ξ) с $x \in U$, а в качестве отображения в $\mathbf{R}^{2p}$ следующее отображение Φ :

$$\Phi(x, \xi) = (x^1, \dots, x^p; \xi^1, \dots, \xi^p),$$

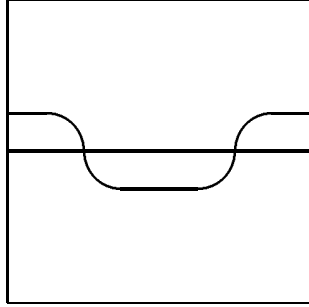
где

$$\varphi(x) = (x^1, \dots, x^p), \quad \xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \xi^p \frac{\partial}{\partial x^p}.$$

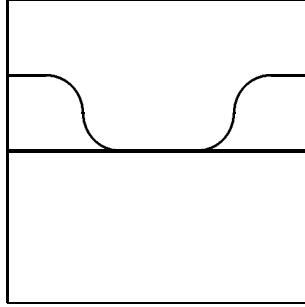
Тогда замены переменных при переходе от одной такой карты к другой осуществляются по первой группе переменных так, как было на P , а по второй — при помощи матрицы Якоби замены первой группы.

Всякое векторное поле ξ на P определяет вложение $f_\xi : P \rightarrow N$ по формуле $f_\xi(x) = (x, \xi(x))$. Пусть $P(\xi)$ — его образ, $P(0) = P$.

Определение. Поле ξ называется *полем общего положения*, если $P(\xi)$ и $P = P(0)$ находятся в общем положении.



В общем положении



Не в общем положении

Если P ориентировано с помощью τ^P в точке x , то N можно ориентировать с помощью (τ^P, τ^P) в любой точке вида (x, η) .

Задача 24. Все особые точки ξ общего положения являются изолированными (следует помнить, что многообразие P априори никуда не вложено, так что векторное поле на нём определяется как тензор типа $(1, 0)$).

Лемма 5. Все особые точки x_j поля общего положения являются невырожденными, и знак особой точки

$$\operatorname{sgn} x_j(P(0) \circ P(\xi)) = \operatorname{ind} \operatorname{HOT} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_j} \right).$$

Доказательство. Пусть в окрестности x_j имеем локальную систему координат (x^β) . Обозначим $J = \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_j} \right)$. Тогда ориентирующим базисом для P будет $\tau_1^P = \tau^P + 0$, а для $P(\xi)$ – базис $\tau_2^P = \tau^P + J\tau^P$. Поэтому из определения общего положения $\det J \neq 0$ и точка невырождена. Знак в смысле индекса пересечения получается из сравнения ориентаций $\operatorname{Or}(\tau_1^P, \tau_2^P)$ и $\operatorname{Or}(\tau_1^P, \tau_1^P)$. Но он как раз и равен $\operatorname{sgn} \det J$. $\square$

Теорема 12. Пусть P — замкнутое ориентированное многообразие, ξ — поле общего положения на нем. Тогда сумма индексов его особых точек равна индексу пересечения $P(0) \circ P(\xi)$ и не зависит от ξ .

Доказательство. Равенство получается из леммы. Далее, любые два поля гомотопны (через нулевое). Хотя это гомотопия не общего положения, тем не менее к гомотопии вложений в N применима теорема 11, которая завершает доказательство. $\square$

Задача 25. Если p нечетно, то сумма индексов особых точек любого векторного поля ξ общего положения на замкнутом ориентируемом p -многообразии равна нулю.

Следствие 4. Для любой гладкой функции f с невырожденными нулями x_j на замкнутом ориентируемом p -многообразии выра-

жение

$$\sum_{x_j} (-1)^{i(x_j)}$$

не зависит от f . Здесь $i(x_j)$ — число (-1) в нормальном виде формы $d^2|_{x_j}$ (ср. (1)).

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\xi = \text{grad } f$. □

Определение. Это число $\sum (-1)^{i(x_j)}$ называется эйлеровой характеристикой многообразия.

По-другому эйлерову характеристику можно определить через триангуляцию. Пусть, например, двумерная поверхность разбита на треугольники, которые пересекаются только по вершине или ребру. Пусть α_0 — число вершин, α_1 — число ребер, а α_2 — число треугольников. Положим

$$\chi(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.$$

Теорема 13. (Хопф). $\chi(P)$ равна сумме индексов особых точек векторного поля общего положения.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно предъявить поле, для которого настоящая теорема выполняется. Для этого в вершины триангуляции надо поместить выталкивающие точки ($\bullet$) (индекс $= +1$), в середины сторон — седла ($\circ$) (индекс $= -1$), а в середины треугольников — всасывающие точки

(*) (индекс=+1):

□

Задача 26. Проверить, что $\chi = 2 - 2g$ для поверхности рода g .

8. Число Лефшеца и его применения

Пусть M — гладкое замкнутое ориентированное многообразие, $\dim M = n$, а $f : M \rightarrow M$ — гладкое отображение. Пусть x_j — неподвижная точка f , т.е. решение уравнения $f(x) = x$, а в ее окрестности введена локальная система координат (x_j^α) , $\alpha = 1, \dots, n$. Тогда в этой окрестности в координатном виде f запишется как

$$x_j^\alpha = f^\alpha(x_j^1, \dots, x_j^n).$$

Определение. Неподвижная точка x_j называется *невырожденной*, если матрица

$$\left[\delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_j} \right) \right] = (1 - df)|_{x=x_j}$$

невырождена. Если все неподвижные точки f невырождены, то f называется *отображением в общем по-*

ложении. Мы будем рассматривать только такие отображения.

Задача 27. В этом случае неподвижных точек конечное число.

Определение. Знаком неподвижной точки x_j называется

$$\operatorname{sgn} \det (1 - df)|_{x=x_j}.$$

Алгебраическим числом неподвижных точек или числом Лефшеца называется

$$L(f) := \sum_j \operatorname{sgn} \det (1 - df)|_{x=x_j}.$$

По предыдущей задаче (для отображения общего положения) оно корректно определено.

С многообразием M и отображением $f : M \rightarrow M$ общего положения можно связать два подмногообразия в $M \times M$, диффеоморфных M : диагональ

$$\Delta = \{(x, x) \in M \times M\}$$

и график

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in M \times M\}.$$

Теорема 14. Они находятся в общем положении и $\Gamma(f) \circ \Delta = L(f)$.

Доказательство. Поскольку

$$\Gamma(f) \cap \Delta = \{(x, x) \in M \times M | f(x) = x\},$$

то это множество (при проекции декартова квадрата на первый сомножитель) биективно отображается на множество неподвижных точек f . Пусть τ — ориентирующий репер для M в точке x_j , тогда (τ, τ) — ориентирующий для $M \times M$ в точке (x_j, x_j) , $\tau + \tau$ — для Δ , а $\tau + (df)(\tau)$ — для $\Gamma(f)$ в точке (x_j, x_j) . Матрица перехода от (τ, τ) к $(\tau + \tau, \tau + df\tau)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ df & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ df & 1 - df \end{pmatrix}.$$

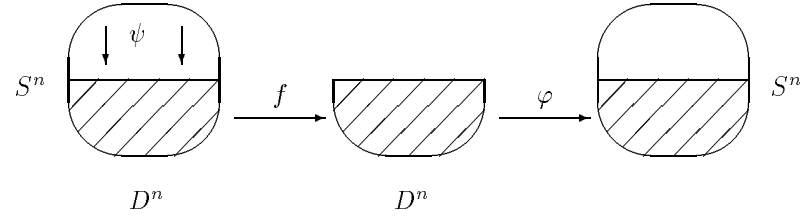
Следовательно, $\text{sgn } x_j (\Gamma(f) \circ \Delta) = \text{sgn } \det (1 - df)|_{x=x_j}$. В частности, подмногообразия находятся в общем положении. Суммируя по j , получаем требуемый результат. $\square$

Следствие 5. *Если отображение $f : M \rightarrow M$ гомотопно отображению в точку, то $L(f) = \pm 1$ и f имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. Индекс пересечения не меняется при гомотопиях, а для отображения в точку $f : M \rightarrow x_0$ единственной неподвижной точкой, причем общего положения, будет x_0 . Значит, $L(f) = \pm 1$. $\square$

Следствие 6. (Теорема Брауэра). *Любое непрерывное отображение $f : D^n \rightarrow D^n$ n -мерного шара в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим отображение сферы вида



$F = \varphi f \psi : S^n \rightarrow S^n$. Так как образ его не покрывает всю сферу, то $\deg F = 0$ и по теореме 3 оно гомотопно отображению в точку. Значит, по предыдущему следствию, оно имеет неподвижную точку. Легко видеть, что эта точка будет неподвижной и для f . $\square$

9. Вполне непрерывные векторные поля и их вращение

Начиная с этого параграфа мы будем заниматься бесконечномерным случаем. При этом мы будем учитывать следующие соображения общего плана:

- Компактные отображения (как, например, компактные линейные операторы в гильбертовых пространствах) хорошо приближаются конечномерными операторами
- Основная область приложения полученных результатов — интегральные операторы.

Задача 28. Пусть поверхность L ограничивает область $T \subset \mathbf{R}^{n+2}$, векторное поле φ не обращается в нуль на L и для последней координаты φ выполняется

$$\varphi^{n+2}(x) = x^{n+2}.$$

Пусть $E^{n+1} = \{x | x^{n+2} = 0\}$ и $L_1 = L \cap E^{n+1}$ также является поверхностью. Обозначим через $\varphi_1 \in E^{n+1}$ поле $\varphi_1 = \{\varphi^1, \dots, \varphi^{n+1}\}$. Доказать, что

$$\deg_L \varphi = \deg_{L_1} \varphi_1.$$

Пусть $T \subset E$ — ограниченная область банахова пространства E , а L — ее граница. Мы будем предполагать, что граница пересечения T с любым конечномерным подпространством является поверхностью. Это — сильное требование, не ограничивающее верности полученных результатов и упрощающее рассуждения¹. При решении задач чаще всего встречается ситуация, когда T — шар.

Определение. Поле $\tilde{\Phi}$, заданное на E (или области) и принимающее значения в E , называется *вполне непрерывным векторным полем* (ВНВП), если оно имеет вид

$$\tilde{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F},$$

где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, а $\mathbf{F}$ — (нелинейный) вполне непрерывный оператор, то есть он непрерывен (переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся) и компактен (переводит ограниченные последовательности в такие, из которых можно выделить сходящуюся подпоследовательность).

¹Можно было бы развивать дальнейшую теорию в предположении, что эти границы являются полиэдрами (см. [3])

Лемма 6. Пусть $\vec{\Phi}$ не имеет нулевых векторов (то есть $\mathbf{F}$ не имеет неподвижных точек) на L . Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\vec{\Phi}(x)\| > \alpha \quad \forall x \in L. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть найдутся такие $x_i \in L$ $i = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - \mathbf{F}x_i\| = 0.$$

Поскольку $\mathbf{F}$ вполне непрерывен, то без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{F}x_i$ сходится к $y \in E$ (иначе перешли бы к подпоследовательности). Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - y\| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - \mathbf{F}x_i\| + \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{F}x_i - y\| = 0.$$

Значит, $y \in L$. При этом $\mathbf{F}y = y$, так как

$$\mathbf{F}y = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{F}x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = y. \quad \square$$

Выберем в E конечномерное пространство E^{n+1} , аппроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{3}$ предкомпактное множество $\mathbf{F}(L)$ значений $\mathbf{F}$ на L (или концов $\vec{\Phi}$ на L). В качестве E^n можно взять линейную оболочку какой-нибудь конечной $\frac{\alpha}{3}$ -сети компактного множества $\mathbf{F}L$. Пусть $\mathbf{P}_{n+1}$ — такой непрерывный оператор, определенный на $\mathbf{F}L$ со значениями в E^{n+1} , что

$$\|\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x - \mathbf{F}x\| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{при } \forall x \in L. \quad (3)$$

Его можно построить, например, следующим образом. Возьмем $\frac{\alpha}{3}$ -сеть множества $\mathbf{F}L$, состоящую из элементов $y_i \in E^{n+1}$ ($i = 1, \dots, k$). Оператор $\mathbf{P}_{n+1}$ определим формулой

$$\mathbf{P}_{n+1}(z) = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i(z) y_i}{\sum_{i=1}^k \mu_i(z)} \quad (z \in \mathbf{F}L), \quad (4)$$

где

$$\mu_i(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \|z - y_i\| & , \text{ если } \|z - y_i\| \leq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & , \text{ если } \|z - y_i\| \geq \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Задача 29. Проверить непрерывность $\mathbf{P}_{n+1}$ и выполнение условия (3).

Определение. Оператор $\mathbf{P}_{n+1}$ называется *оператором шаудеровского проектирования*.

Определим на поверхности $L_1 = \partial(T \cap E^{n+1})$ в пространстве E^{n+1} оператор $\vec{\Phi}_{n+1}$, положив

$$\vec{\Phi}_{n+1}x = x - \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x \quad (x \in L_1). \quad (5)$$

Непрерывное векторное поле $\vec{\Phi}_{n+1}$ не будет иметь на L_1 нулевых векторов, так как в силу (2) и (3):

$$\begin{aligned} \|\vec{\Phi}_{n+1}x\| &= \|x - \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x\| \geq \\ &\geq \|x - \mathbf{F}x\| - \|\mathbf{F}x - \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x\| > \frac{\alpha}{2} \quad (x \in L_1). \end{aligned}$$

Число $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}((\vec{\Phi}, L), E^{n+1}, P_{n+1})$ назовем *вращением* поля $\vec{\Phi}$ на L (о корректности — см. ниже).

Если мы выберем другой непрерывный оператор $\mathbf{P}'_{n+1}$, удовлетворяющий (3), и определим

$$\vec{\Phi}'_{n+1}x = x - \mathbf{P}'_{n+1}\mathbf{F}x \quad (x \in L_1),$$

то $\vec{\Phi}_{n+1}$ и $\vec{\Phi}'_{n+1}$ будут гомотопны в E^{n+1} . Гомотопия, определенная формулой

$$\mathbf{X}(x, t) = t\vec{\Phi}'_{n+1}x + (1-t)\vec{\Phi}_{n+1}x \quad (x \in L_1, t \in [0, 1]),$$

не принимает нулевых значений, так как

$$\|t\vec{\Phi}'_{n+1}x + (1-t)\vec{\Phi}_{n+1}x\| \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \|\vec{\Phi}x\| - t\|\vec{\Phi}'_{n+1}x - \vec{\Phi}x\| - (1-t)\|\vec{\Phi}_{n+1}x - \vec{\Phi}x\| = \\
&= \|\vec{\Phi}x\| - t\|\mathbf{P}'_{n+1}\mathbf{F}x - \mathbf{F}x\| - (1-t)\|\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x - \mathbf{F}x\| > \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, вращение γ_{n+1} всех векторных полей $\vec{\Phi}_{n+1}$, определенных равенством (5), где $\mathbf{P}_{n+1}$ удовлетворяет (3), будет одинаковым.

Пусть теперь выбрано подпространство большей размерности $E^{n+2} \supset E^{n+1}$ и соответствующее $\vec{\Phi}_{n+2}$. Полученное вращение обозначим через γ_{n+2} . По доказанному, оно не зависит от выбора $\mathbf{P}_{n+2}$. Следовательно, в качестве $\mathbf{P}_{n+2}$ можно взять $\mathbf{P}_{n+1}$. Тогда, по задаче из начала параграфа, $\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1}$.

Если E^n и E^m — разные, то возьмем их линейную оболочку. Тогда, по последнему рассуждению, $\gamma_n = \gamma_m$.

Определение. Полученное таким образом, однозначно определенное число $\gamma_{\vec{\Phi}}$ называется *вращением* ВНВП $\vec{\Phi}$.

Определение. ВНВП $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Psi}$ без нулевых векторов на L называются *гомотопными*, если найдется такой вполне непрерывный оператор $\mathbf{X}(x, t)$ $x \in L$, $t \in [0, 1]$ на $L \times [0, 1]$ со значениями в E , что

- $x - \mathbf{X}(x, t) \neq 0 \quad \forall x, \forall t,$
- $x - \mathbf{X}(x, 0) = \vec{\Phi}x \quad \forall x,$
- $x - \mathbf{X}(x, 1) = \vec{\Psi}x \quad \forall x.$

Задача 30. Доказать, что вращения гомотопных ВНВП одинаковы.

Задача 31. Доказать, что $\mathbf{X}(x, t)$ вполне непрерывен, если при каждом фиксированном t он компактен и непрерывен по t ($t \in [0, 1]$) равномерно относительно $x \in L$.

Пусть $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ — ВНВП без нулевых векторов на L — имеет на L вращение γ . Тогда, как было установлено, выполняется оценка (2).

Определение. Векторное поле $\vec{\Phi}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{F}_1$, где $\mathbf{F}_1$ — вполне непрерывный оператор, называется *возмущенным*.

Задача 32. Доказать, что если $\|\vec{\Phi}_1 x\| < \alpha$ для $\forall x \in L$, то $\gamma_{\vec{\Phi}} = \gamma_{\vec{\Phi}_1}$.

Указание. Рассмотреть гомотопию $\mathbf{X}(x, t) = t\mathbf{F}_1 x + \mathbf{F}x$.

10. Алгебраическое число неподвижных точек вполне непрерывного векторного поля

Пусть E — банахово пространство, $G \subset E$ — ограниченная область, $\partial G = L$, на G задано вполне непрерывное векторное поле (ВНВП) $\vec{\Phi}$. Точки $x \in L$, для которых $\vec{\Phi}(x) = 0$, называются *неподвижными точками* $\mathbf{F}$.

Пусть x — изолированная неподвижная точка $\mathbf{F}$, $x \notin L$, S^ε — сфера радиуса ε , T^ε — шар, $\partial T^\varepsilon = S^\varepsilon$, x — единственная неподвижная точка $\mathbf{F}$ в T^ε , а $\vec{\Phi}_\varepsilon = \vec{\Phi}|_{S^\varepsilon}$.

Задача 33. Вращение $\vec{\Phi}_\varepsilon$ не зависит от ε .

Определение. Индекс x — это вращение γ_x поля $\vec{\Phi}_\varepsilon$.

Задача 34. Нули ВНВП $\vec{\Phi}$ образуют компактное множество.

Следствие 7. Если $\mathbf{F}$ имеет в G только изолированные неподвижные точки, то их конечное число.

Теорема 15. Пусть все неподвижные точки $x_1, \dots, x_s$ поля $\mathbf{F}$ лежат внутри G . Тогда сумма индексов $\gamma_{x_1} + \dots + \gamma_{x_s}$ равна вращению $\gamma_{\vec{\Phi}}$ поля $\vec{\Phi}$ на L .

Доказательство. Проведем через точки $x_1, \dots, x_s$ конечномерное подпространство E^n , достаточно хорошо (т. е., как в определении вращения ВНВП) аппроксимирующее множество значений оператора $\vec{F} = \mathbf{I} - \vec{\Phi}$ на $G \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i$, где через T_i и S_i обозначены шары и сферы из определения индекса неподвижной

точки. Применив к конечномерному полю $\vec{\Phi}_n$, определенному на $E^n \cap \left(G \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i\right)$ формулой (5), теорему 9, получаем требуемое утверждение. $\square$

Определение. Вращение $\gamma_{\vec{\Phi}}$ поля $\vec{\Phi}$ на L называется *алгебраическим числом неподвижных точек* поля $\mathbf{F}$ в G .

Следствие 8. Для того, чтобы $\mathbf{F}$ в G не имело неподвижных точек, необходимо, чтобы $\gamma_{\vec{\Phi}}$ было равно нулю.

11. Классификационная теорема

Пусть область G связна.

Теорема 16. ВНВП $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Psi}$ без нулевых векторов на L гомотопны, если их вращения одинаковы.

Доказательство. Операторы $\mathbf{I} - \vec{\Phi}$ и $\mathbf{I} - \vec{\Psi}$ вполне непрерывны. Поэтому найдется такое $\alpha > 0$ (ср. с параграфом 9), что

$$\|\vec{\Phi}x\| > \alpha, \quad \|\vec{\Psi}x\| > \alpha \quad (\forall x \in L). \quad (6)$$

Обозначим через E^n n -мерное подпространство, аппроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{4}$ компактные множества $(\mathbf{I} - \vec{\Phi})L$ и $(\mathbf{I} - \vec{\Psi})L$. Пусть $\mathbf{P}_n$ — оператор шаудеровского проектирования (4) множеств $(\mathbf{I} - \vec{\Phi})L$ и $(\mathbf{I} - \vec{\Psi})L$ на E^n , удовлетворяющий на этих множествах условию

$$\|\mathbf{P}_n y - y\| \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Векторное поле $\vec{\Phi}$ гомотопно полю $\vec{\Phi}_n = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n(\mathbf{I} - \vec{\Phi})$ (соответственно, $\vec{\Psi}$ — полю $\vec{\Psi}_n = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n(\mathbf{I} - \vec{\Psi})$). Действительно, оператор

$$\mathbf{F}(x, t) = (1 - t)(x - \vec{\Phi}x) + t\mathbf{P}_n(x - \vec{\Phi}x) \quad (x \in L; 0 \leq t \leq 1)$$

вполне непрерывен при каждом t и непрерывен по t равномерно относительно $x \in L$ и, таким образом (см. задачу 31), вполне

непрерывен на топологическом произведении $L \times [0, 1]$. При этом $x - \vec{\Phi}(x, t)$ не обращается в нуль, так как из (6) и (7)

$$\|x - \vec{\Phi}(x, t)\| \geq \|\vec{\Phi}x\| - t\|x - \vec{\Phi}x - \mathbf{P}_n(x - \vec{\Phi}x)\| \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, достаточно показать гомотопность полей $\vec{\Phi}_n$ и $\vec{\Psi}_n$.

Значения вполне непрерывных операторов $\mathbf{F}_1 = \mathbf{I} - \vec{\Phi}_n$ и $\mathbf{F}_2 = \mathbf{I} - \vec{\Psi}_n$ принадлежат конечномерному пространству E^n . Пусть $h_1, \dots, h_n$ – базис E^n . Любой элемент $y \in E^n$ однозначно представляется в виде

$$y = \sum_{i=1}^n l_i(y)h_i, \quad (8)$$

где $l_1, \dots, l_n$ – некоторые линейные функционалы на E^n . Векторные поля $\vec{\Phi}_n$ и $\vec{\Psi}_n$, рассматриваемые на $L \cap E^n$, имеют одинаковое вращение, поэтому в силу теоремы 3 найдется непрерывная по $t \in [0, 1]$ и по $x \in L \cap E^n$ нигде не обращающаяся в нуль вектор-функция $x - \mathbf{F}(x, t)$, причем

$$x - \mathbf{F}(x, 0) = \vec{\Phi}_n x, \quad x - \mathbf{F}(x, 1) = \vec{\Psi}_n x \quad (x \in L \cap E^n). \quad (9)$$

Пусть

$$\begin{aligned} L' &= L \times [0, 1] = \{(x, t) | x \in L, t \in [0, 1]\}, \\ M &= \left\{ (x, t) \in L' | t = 0 \text{ или } t = 1, \forall x \right\} \cup \\ &\cup \left\{ (x, t) \in L' | x \in L \cap E^n, \forall t \right\}. \end{aligned}$$

Определим на M непрерывные функции $\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_n(x, t)$ следующим образом:

$$\varphi_i(x, t) = \begin{cases} l_i(\mathbf{F}_1 x) & \text{при } t = 0, & x \in L, \\ l_i(\mathbf{F}_2 x) & \text{при } t = 1, & x \in L, \\ l_i(\mathbf{F}(x, t)) & \text{при } t \in [0, 1], & x \in L \cap E^n. \end{cases}$$

Очевидно, что эти функции ограничены. Продолжим их до функций

$$\varphi'_1(x, t), \dots, \varphi'_n(x, t)$$

на L' (ср. с леммой 1) с сохранением непрерывности и ограниченности. Определим оператор $\mathbf{F}'(x, t)$ на L' равенством

$$\mathbf{F}'(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi'_i(x, t) h_i \quad (x \in L, t \in [0, 1]).$$

Оператор $\mathbf{F}'(x, t)$ конечномерен и, тем более, вполне непрерывен. При этом $\mathbf{F}'(x, 0) = \mathbf{F}_1 x$; $\mathbf{F}'(x, 1) = \mathbf{F}_2 x$, то есть

$$x - \mathbf{F}'(x, 0) = \tilde{\Phi}_n x, \quad x - \mathbf{F}'(x, 1) = \tilde{\Psi}_n x, \quad (x \in L).$$

Разность $x - \mathbf{F}'(x, t)$ не обращается в нуль при $x \in L \cap E^n$ по условию. С другой стороны, при $\forall (x, t) \quad \tilde{\Phi}'(x, t) \in E^n$, так что при $x \notin L \cap E^n$ разность $x - \mathbf{F}'(x, t)$ также не обращается в нуль. Итак, ВНВП $\tilde{\Phi}_n$ и $\tilde{\Psi}_n$ гомотопны при помощи $\mathbf{F}'$. $\square$

12. Общий принцип Лере — Шаудера

Как мы установили, каждый признак отличия от нуля вращения векторного поля на границе некоторой области является одновременно достаточным признаком существования неподвижных точек у поля внутри области. Это и есть суть принципа Лере — Шаудера.

При помощи принципа Лере — Шаудера можно доказывать не только теоремы существования, но и единственности. Например, пусть вращение поля $\tilde{\Phi}$ на границе области G равно 1 или -1 , а также известно, что индекс каждой неподвижной точки поля $\tilde{\Phi}$ в области G имеет один и тот же знак. Тогда поле $\tilde{\Phi}$ имеет в области G только одну неподвижную точку.

Следующее рассуждение называется *принципом Шаудера*. Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, определенный на замкнутом шаре T банахова пространства E и преобразующий границу S шара T в T :

$$\mathbf{A}S \subset T.$$

Рассмотрим на S ВНВП $\tilde{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Допустим, что оно на S не имеет нулевых векторов. Тогда оно гомотопно ВНВП $\mathbf{I}$, вращение которого равно 1. Следовательно, и вращение $\tilde{\Phi}$ на S равно

1. Значит, поле $\vec{\Phi}$ имеет в шаре T по крайней мере одну неподвижную точку.

Аналогично получается следующее утверждение, которое также называют принципом Шаудера.

Задача 35. Если непрерывный оператор $\mathbf{A}$ преобразует выпуклое множество T банахова пространства в компактную часть множества T , то найдется такая точка $x \in T$, что $\mathbf{A}x = x$.

13. Теорема о произведении вращений и ее применение к слабо связанным уравнениям

Рассмотрим два банаховых пространства E_1 и E_2 . Пусть в прямой сумме $E = E_1 \oplus E_2$ некоторым образом введена норма, совпадающая на E_1 и E_2 с нормами, определенными ранее. Пусть на шаре $T_1 \subset E_1$ радиуса ρ_1 задано ВНВП $\vec{\Phi}_1$ без нулевых векторов на сфере $S_1 = \partial T_1$ и с вращением γ_1 на S_1 , а на шаре $T_2 \subset E_2$ радиуса ρ_2 задано ВНВП $\vec{\Phi}_2$ без нулевых векторов на сфере $S_2 = \partial T_2$ и с вращением γ_2 на S_2 . Определим на топологическом произведении $T = T_1 \times T_2$, лежащем в пространстве E , поле $\vec{\Phi}$ равенством

$$\vec{\Phi}(x + y) = \frac{\|x\|}{\rho_1} \vec{\Phi}_1 \left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x \right) + \frac{\|y\|}{\rho_2} \vec{\Phi}_2 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y \right), \quad (10)$$

($x \in T_1, y \in T_2$).

Задача 36. Доказать, что поле $\vec{\Phi}$ вполне непрерывно, так как оператор

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x + y) &= x + y - \vec{\Phi}(x + y) = \\ &= \frac{\|x\|}{\rho_1} \left[\frac{\rho_1}{\|x\|} x - \vec{\Phi}_1 \left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x \right) \right] + \frac{\|y\|}{\rho_2} \left[\frac{\rho_2}{\|y\|} y - \vec{\Phi}_2 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y \right) \right] \end{aligned}$$

вполне непрерывен.

Обозначим через S границу T .

Задача 37. Показать, что $\vec{\Phi}$ на S не имеет нулевых векторов.

Задача 38. Показать, что (в конечномерном случае) хотя $\partial(T_1 \times T_2)$ и не является многообразием, но для него можно корректно определить вращение векторного поля, для чего рассмотреть границу ε -окрестности $T_1 \times T_2$.

Теорема 17. Вращение на S поля $\vec{\Phi}$, определенного равенством (10), равно произведению $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ вращений поля $\vec{\Phi}_1$ на S_1 и поля $\vec{\Phi}_2$ на S_2 .

Доказательство. Пусть $E_1^0 \subset E_1$ — конечномерное подпространство, аппроксимирующее с точностью до $\alpha/4$ множество $(\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1)T_1$, где

$$\alpha = \inf_{x \in S^1} \|\vec{\Phi}_1 x\| > 0.$$

Пусть $\mathbf{P}_n$ — шаудеровский оператор проектирования множества $(\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1)T_1$ на E_1^0 , удовлетворяющий условию

$$\|\mathbf{P}_n z - z\| < \frac{\alpha}{2} \quad (z \in (\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1)T_1).$$

Обозначим через $\vec{\Phi}_1^0$ оператор $\mathbf{I} - \mathbf{P}_n(\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1)$. Тогда, как и ранее,

$$\mathbf{F}_1(x, t) = (1 - t)(\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1)x + t\mathbf{P}_n(\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1)x \quad (x \in T_1, t \in [0, 1])$$

— ВНВП,

$$\mathbf{F}_1(x, 0) = x - \vec{\Phi}_1 x, \quad \mathbf{F}_1(x, 1) = x - \vec{\Phi}_1^0 x,$$

а $x - \mathbf{F}_1(x, t)$ не обращается в нуль на $S_1 \times [0, 1]$. Следовательно, вращение γ_1 ВНВП $\vec{\Phi}_1^0$ на S^1 совпадает с вращением $\vec{\Phi}_1$. Множество $(\mathbf{I} - \vec{\Phi}_1^0)T_1$ лежит в конечномерном подпространстве E_1^0 .

Совершенно аналогично строятся E_2^0 , $\vec{\Phi}_2^0$ с вращением γ_2 на S_2 и гомотопия $\mathbf{F}_2(y, t)$ при $y \in T_2$, $t \in [0, 1]$.

Определим теперь аналогично (10) векторное поле $\vec{\Phi}^0$ на S :

$$\vec{\Phi}^0(x + y) = \frac{\|x\|}{\rho_1} \vec{\Phi}_1^0 \left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x \right) + \frac{\|y\|}{\rho_2} \vec{\Phi}_2^0 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y \right) \quad (x + y \in S).$$

Поля $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Phi}^0$ гомотопны и, следовательно, их вращения совпадают. Действительно, ВНВП

$$\mathbf{F}(x+y, t) = \frac{\|x\|}{\rho_1} \mathbf{F}_1 \left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x, t \right) + \frac{\|y\|}{\rho_2} \mathbf{F}_2 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y, t \right),$$

$(x+y \in S, t \in [0, 1])$, не принимает на S значений, равных $x+y$, причем

$$\mathbf{F}(x+y, 0) = (\mathbf{I} - \vec{\Phi})(x+y), \quad \mathbf{F}(x+y, 1) = (\mathbf{I} - \vec{\Phi}^0)(x+y).$$

Следовательно, нам надо показать, что вращение $\vec{\Phi}^0$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Поскольку $(\mathbf{I} - \vec{\Phi}^0)T \subset E^0 = E_1^0 \oplus E_2^0$, то $\vec{\Phi}^0$ достаточно рассматривать только на E^0 .

Определим на $S \cap E^0$ векторные поля $\vec{\Psi}_1$ и $\vec{\Psi}_2$:

$$\vec{\Psi}_1(x+y) = \frac{\|x\|}{\rho_1} \vec{\Phi}_1^0 \left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x \right) + y,$$

$$\vec{\Psi}_2(x+y) = \mu(x+y) \left\{ x + \frac{\|y\|}{\rho_2} \vec{\Phi}_2^0 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y \right) \right\},$$

где положительный нормирующий множитель $\mu(x+y)$ выбран из условия $\vec{\Psi}_2(x+y) \in S$. Из вида операторов $\vec{\Psi}_1$ и $\vec{\Psi}_2$, а также, соответственно, $\mathbf{I} - \vec{\Psi}_1$ и $\mathbf{I} - \vec{\Psi}_2$ (отделение переменной), получаем, что вращения $\vec{\Psi}_1$ и $\vec{\Psi}_2$ равны γ_1 и γ_2 , соответственно. Поскольку степень композиции отображений равна произведению степеней, то вращение $\vec{\Psi}_1 \vec{\Psi}_2$ на $S \cap E^0$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. При всех $x+y \in S \cap E^0$

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_1 \vec{\Psi}_2(x+y) &= \vec{\Psi}_1 \left[\mu(x+y) \left\{ x + \frac{\|y\|}{\rho_2} \vec{\Phi}_2^0 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y \right) \right\} \right] = \\ &= \mu(x+y) \left[\frac{\|x\|}{\rho_1} \vec{\Phi}_1^0 \left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x \right) + \frac{\|y\|}{\rho_2} \vec{\Phi}_2^0 \left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y \right) \right] = \\ &= \mu(x+y) \vec{\Phi}^0(x+y). \end{aligned}$$

Поскольку μ строго положительна, то $\vec{\Psi}_1 \vec{\Psi}_2$ и $\vec{\Phi}^0$ гомотопны и вращение $\vec{\Phi}^0$ на $S \cap E^0$, а следовательно, и вращения $\vec{\Phi}^0$ и $\vec{\Phi}$ на S равны $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. $\square$

Задача 39. Доказать, что $\vec{\Phi}$ и $\vec{\Phi}^0$ на S гомотопны.

Теорема 18. (о слабо связанных уравнениях) Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} \varphi = \mathbf{A}\varphi + \varepsilon \mathbf{C}(\varphi, \psi) \\ \psi = \mathbf{B}\psi + \varepsilon \mathbf{D}(\varphi, \psi), \end{cases} \quad (11)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ — вполне непрерывные, возможно нелинейные, операторы в банаховом пространстве E . Пусть на некоторой сфере $S \subset E$ векторные поля $\vec{\Phi}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ и $\vec{\Phi}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ не имеют нулевых векторов, а их вращения отличны от нуля. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех ε , удовлетворяющих $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, система (11) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. Пусть $S = \partial T$, а $T' = T \times T \subset E' = E \oplus E$. На E' при $t \in [0, 1]$ определим ВНВП $\vec{\Phi}'_t$ равенством $(\varphi, \psi \in E)$

$$\vec{\Phi}'_t(\varphi, \psi) = (\varphi - \mathbf{A}\varphi - \varepsilon t \mathbf{C}(\varphi, \psi), \psi - \mathbf{B}\psi - \varepsilon t \mathbf{D}(\varphi, \psi)).$$

Как обычно, так как поля $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ на S не имеют нулевых векторов, то найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\varphi - \mathbf{A}\varphi\| > \alpha, \quad \|\varphi - \mathbf{B}\varphi\| > \alpha \quad (\varphi, \psi \in S).$$

Так как операторы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ компактны, то найдется такая постоянная $M > 0$, что

$$\|\mathbf{C}(\varphi, \psi)\| \leq M, \quad \|\mathbf{D}(\varphi, \psi)\| \leq M \quad (\varphi, \psi \in T).$$

Если $\varepsilon_0 < \frac{\alpha}{M}$, то при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ векторы поля $\vec{\Phi}'_t$ при $t \in [0, 1]$ на $S' = \partial T'$ не обращаются в нуль. Следовательно, поля $\vec{\Phi}'_1$ и $\vec{\Phi}'_0$ гомотопны. Значит, по принципу Лере–Шаудера для доказательства теоремы достаточно убедиться, что вращение $\vec{\Phi}'_0$ на S' не равно 0. Но оно (ср. с предыдущей задачей) равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, а эти вращения отличны от нуля по рассуждению при формулировке принципа Лере–Шаудера. $\square$

Задача 40. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : E_1 &\rightarrow E_1, & \mathbf{B} : E_2 &\rightarrow E_2, \\ \mathbf{C} : E_1 \oplus E_2 &\rightarrow E_1, & \mathbf{D} : E_1 \oplus E_2 &\rightarrow E_2. \end{aligned}$$

14. Нечетные поля на сферах

Задача 41. (Теорема Люстерника — Шнирельмана — Борсука)
Пусть на сфере $S \subset \mathbf{R}^n$ задано векторное поле φ , не обращающееся в нуль и удовлетворяющее

$$\frac{\varphi(x^*)}{\|\varphi(x^*)\|} \neq \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|},$$

где x^* — точка, противоположная x . Убедиться, что это поле гомотопно нечетному полю ψ :

$$\psi(x^*) = -\psi(x).$$

Вывести отсюда, что вращение поля φ нечетно.

Указание. Воспользоваться теоремой 3 и убедиться, что число Лефшеца гауссова отображения нечетного поля четно, а для (какого-нибудь представителя гомотопического класса) отображения сферы в сферу с четной степенью — нечетно.

Теорема 19. Пусть на сфере S банахова пространства E задано вполне непрерывное поле $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ без нулевых векторов, причем для точек сферы x и x^* , симметричных относительно центра,

$$\frac{\vec{\Phi}(x^*)}{\|\vec{\Phi}(x^*)\|} \neq \frac{\vec{\Phi}(x)}{\|\vec{\Phi}(x)\|} \quad (x \in S).$$

Тогда вращение поля $\vec{\Phi}$ на S нечетно.

Доказательство. Рассмотрим векторные поля

$$\vec{\Phi}_t x = \frac{1}{1+t} \vec{\Phi} x - \frac{t}{1+t} \vec{\Phi}(-x) \quad (x \in S, t \in [0, 1]).$$

При каждом t поле $\vec{\Phi}_t$ вполне непрерывно, так как

$$\vec{\Phi}_t x = x - \left[\frac{1}{1+t} \mathbf{F} x - \frac{t}{1+t} \mathbf{F}(-x) \right] \quad (x \in S, t \in [0, 1]),$$

а оператор $\frac{1}{1+t}\mathbf{F}x - \frac{t}{1+t}\mathbf{F}(-x)$ вполне непрерывен как разность двух вполне непрерывных операторов. Каждое поле $\vec{\Phi}_t$ не имеет нулевых векторов, так как из равенства $\vec{\Phi}_{t'}x' = 0$ следует

$$\vec{\Phi}x' = t'\vec{\Phi}(-x'),$$

что противоречит условиям теоремы. Поскольку

$$\|\vec{\Phi}_{t_1}x - \vec{\Phi}_{t_2}x\| \leq 2|t_1 - t_2| \sup_{y \in S} \|\vec{\Phi}y\| \quad (x \in S),$$

то оператор-функция равномерно непрерывна по t . Мы показали, что поле $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_0$ гомотопно $\vec{\Psi} = \vec{\Phi}_1$:

$$\vec{\Psi}x = \frac{1}{2}\vec{\Phi}x - \frac{1}{2}\vec{\Phi}(-x),$$

которое нечетно:

$$\vec{\Psi}(-x) = -\vec{\Psi}x \quad (x \in S).$$

Таким образом, нам осталось показать, что вращение поля $\vec{\Psi}$ нечетно. Для этого аппроксимируем множество $(\mathbf{I} - \vec{\Psi})S$ подпространством E^n , а для построения оператора шаудеровского проектирования выберем симметричную систему точек, то есть

$$\{y_1, \dots, y_k, -y_1, \dots, -y_k\}.$$

Тогда по формуле (4) оператор $\mathbf{P}_n$ будет нечетным на $(\mathbf{I} - \vec{\Psi})S$:

$$\mathbf{P}_n(-z) = -\mathbf{P}_nz \quad (z \in (\mathbf{I} - \vec{\Psi})S),$$

и следовательно, поле

$$\vec{\Psi}_n = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n(\mathbf{I} - \vec{\Psi})$$

также будет нечетным. По определению вращение $\gamma_{\vec{\Psi}}$ равно вращению конечномерного нечетного поля $\vec{\Psi}_n|_{S \cap E^n}$, которое по предыдущей задаче нечетно. $\square$

Определение. Векторное поле $\mathbf{I} - \mathbf{F}$ будем называть *линейным*, если оператор $\mathbf{F}$ линеен.

Теорема 20. (о нулевом векторе поля, близкого к линейному). Пусть $\mathbf{A}$ – вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E . Пусть можно указать такой вполне непрерывный линейный оператор $\mathbf{B}$, что на сфере $S = \{x \mid \|x\| = \rho\}$ при некотором фиксированном λ

$$\|\mathbf{A}x - \lambda\mathbf{B}x\| < \|x - \lambda\mathbf{B}x\| \quad (x \in S). \quad (12)$$

Тогда уравнение

$$x = \mathbf{A}x$$

имеет в шаре $T = \{x \mid \|x\| \leq \rho\}$ по крайней мере одно решение.

Доказательство. Для доказательства надо заметить, что ВНВП $\vec{\Phi}x = x - \mathbf{A}x$ удовлетворяет условиям теоремы 19. Действительно, если в некоторой паре точек x_0 и $x_0^* = -x_0$, $x_0 \in S$ векторы поля $\vec{\Phi}$ направлены одинаково, то найдется такое $\alpha > 0$, что $\vec{\Phi}x_0 = \alpha\vec{\Phi}x_0^*$, т. е.

$$(1 + \alpha)x_0 = \mathbf{A}x_0 - \alpha\mathbf{A}x_0^*,$$

откуда

$$(1 + \alpha)(x_0 - \lambda\mathbf{B}x_0) = \mathbf{A}x_0 - \lambda\mathbf{B}x_0 - \alpha(\mathbf{A}x_0^* - \lambda\mathbf{B}x_0^*).$$

Полученное равенство противоречиво, так как в силу (12)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}x_0 - \lambda\mathbf{B}x_0 - \alpha(\mathbf{A}x_0^* - \lambda\mathbf{B}x_0^*)\| &< \|x_0 - \lambda\mathbf{B}x_0\| + \alpha\|x_0^* - \lambda\mathbf{B}x_0^*\| = \\ &= (1 + \alpha)\|x_0 - \lambda\mathbf{B}x_0\|. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Легко видеть, что при выполнении условия (12) поле $\vec{\Phi}$ гомотопно линейному полю $\mathbf{I} - \lambda\mathbf{B}$. Мы покажем, что вращение линейного поля по абсолютной величине равно единице. Поэтому в условиях теоремы 20 вращение поля $\vec{\Phi}$ на S также равно 1 или -1.

15. О свойствах собственных пространств линейных операторов в банаховых пространствах

Сначала мы докажем чисто линейно-алгебраическое утверждение, не использующее топологии и банаховых пространств.

Лемма 7. Пусть $u : E \rightarrow E$ — линейное отображение, $E_n = \text{Ker } u^n$, $I_n = \text{Im } u^n$, $n \in \mathbf{N}$, $E_0 = 0$, $I_0 = E$. Тогда

- (1) Последовательность (E_n) либо строго возрастает, либо строго возрастает до некоторого индекса p , а затем стабилизируется.
- (2) Последовательность (I_n) либо строго убывает, либо строго убывает до некоторого индекса q и затем стабилизируется.
- (3) Если обе последовательности (E_n) и (I_n) стабилизируются, то $p = q$. Положим в этом случае $E_\infty = E_p = \bigcup E_n$, $I_\infty = I_p = \bigcap I_n$. Тогда E совпадает с прямой суммой $E_\infty \oplus I_\infty$, сужение $u|_{E_\infty}$ нильпотентно, а сужение $u|_{I_\infty}$ является изоморфизмом пространства I_∞ .

Доказательство. Имеем $E_{n+m} = (u^m)^{-1}(E_n)$ и $I_{m+n} = u^m(I_n)$. Так как отображения u^n и u перестановочны, то E_n и I_n — инвариантные пространства u . Поэтому $E_{n+1} = u^{-1}(E_n)$ содержит E_n и аналогичным образом $I_{n+1} \subset I_n$. Монотонность установлена. Если для некоторого n справедливо равенство $E_n = E_{n+1}$, то $(u^m)^{-1}(E_n) = (u^m)^{-1}(E_{n+1})$, т.е. $E_{n+m} = E_{n+m+1}$, и потому последовательность (E_i) стабилизируется при $i \geq n$. Аналогичные рассуждения справедливы и для последовательности (I_i) . Таким образом, (1) и (2) доказаны.

Для доказательства (3) покажем сначала, что $q \leq p$. Для этого достаточно показать, что из соотношений $E_n = E_{n+1}$ и $I_n \neq I_{n+1}$ следует, что $I_{n+1} \neq I_{n+2}$. (Действительно, получим противоречие с $p < q = n + 1$.) Допустим, что $I_{n+1} = I_{n+2}$, и пусть $u^n(x) \in I_n$. Тогда $u^{n+1}(x) \in I_{n+1} = I_{n+2}$. Следовательно, найдется такое $y \in E$, что $u^{n+1}(x) = u^{n+2}(y)$. Тогда $u^{n+1}(x -$

$u(y) = 0$ и так как $E_n = E_{n+1}$, то $u^n(x - u(y)) = 0$, т.е. $u^n(x) = u^{n+1}(y) \in I_{n+1}$. Таким образом, $I_n = I_{n+1}$, что противоречит предположению. Тем самым доказано, что $q \leq p$. Аналогично доказывается, что $p \leq q$. Следовательно, если p и q определены, то $p = q$.

Считая, что числа p и q определены, покажем, что $E_\infty \cap I_\infty = 0$. Всякий элемент этого пересечения имеет вид $x = u^p(y)$ и удовлетворяет равенству $u^p(x) = 0$. Таким образом, $u^{2p}(y) = 0$, откуда в силу равенства $E_p = E_{2p}$ получаем, что $u^p(y) = 0$, т.е. $x = 0$.

Пусть $\tilde{u}$ — линейное отображение факторпространства E/E_∞ , индуцированное u . Так как $E_\infty = E_p = E_{p+1}$, то отображение $\tilde{u}$ инъективно. Оказывается, что оно сюръективно. Действительно, применяя уже доказанную часть пункта (3) к $\tilde{u}$ (для которого $\tilde{p} = 1$ и в силу инъективности $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 = \tilde{E}_\infty = 0$), получаем, что если бы $\tilde{u}$ не было бы отображением "на", то последовательность образов $\tilde{u}^n(E/E_\infty)$ была бы строго убывающей. Отсюда следовало бы, что последовательность $u^n(E) \oplus E_\infty = I_n \oplus E_\infty$ также должна строго убывать. Но это противоречит предположению, что последовательность I_n стабилизируется. Таким образом, $\tilde{u}$ — изоморфизм. Аналогичное утверждение справедливо и для $\tilde{u}^p$, в частности $\tilde{u}^p$ отображает E/E_∞ на себя. Отсюда следует, что $u^p(E) + E_\infty = E$, а значит, $I_\infty \oplus E_\infty = E$.

Наконец, утверждение, что $\tilde{u}$ является изоморфизмом, означает, что сужение $u|_{I_\infty}$ также является изоморфизмом, а так как $u^p(E_\infty) = 0$, то сужение $u|_{E_\infty}$ нильпотентно. $\square$

Лемма 8. Пусть L — (замкнутое) подпространство банахова пространства X , не совпадающее с X . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой $y \in X$, что $\|y\| = 1$ и $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ для всех $x \in L$.

Доказательство. Пусть y_0 — любой элемент из X , не принадлежащий L , и $d = \inf_{x \in L} \|y_0 - x\|$. Тогда $d > 0$, так как иначе y_0 был бы предельным элементом для L и, следовательно, входил бы в L , что невозможно по условию. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x_0 \in L$, что $d < \|y_0 - x_0\| < d + d\varepsilon$. Положим

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}.$$

Элемент $y \notin L$ (так как иначе y_0 входил бы в L) и $\|y\| = 1$. Возьмем любой элемент $x \in L$. Пусть $z = x_0 + \|y_0 - x_0\|x$, $z \in L$. Тогда

$$\begin{aligned} \|y - x\| &= \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - z\| > \\ &> \frac{1}{d + d\varepsilon} \|y_0 - z\| \geq \frac{d}{d + \varepsilon d} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Определение. Банахово пространство X называется *локально компактным*, если всякое ограниченное и замкнутое множество этого пространства компактно.

Теорема 21. *Для того, чтобы банахово пространство X являлось локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было конечномерным.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что каждое ограниченное и замкнутое множество элементов из X компактно. Возьмем в X произвольный элемент x_1 с $\|x_1\| = 1$. Обозначим через L_1 подпространство, порождаемое элементом x_1 . Если $L_1 = X$, то теорема доказана. Если же $L_1 \neq X$, то по лемме 8 найдется такой элемент x_2 , что $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$, $\|x_2\| = 1$. Обозначим через L_2 подпространство, порождаемое элементами x_1 и x_2 . Имеются две возможности: либо $L_2 = X$ и теорема доказана, либо $L_2 \neq X$, тогда по лемме 8 найдется такой элемент x_3 , что

$$\|x_3 - x_1\| \geq 1/2, \quad \|x_3 - x_2\| \geq 1/2, \quad \|x_3\| = 1.$$

Продолжим этот процесс. Тогда либо для некоторого n пространство L_n совпадет с X и теорема будет доказана, либо мы получим такую бесконечную последовательность $\{x_n\}$, что $\|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ для любых $n \neq m$. Но это противоречит компактности замкнутого единичного шара. $\square$

Напомним следующее утверждение, известное из курса функционального анализа (см. [2, стр. 244]):

Теорема 22. *Всякий компактный линейный оператор A в банаховом пространстве E имеет при любом $\delta > 0$ лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным значениям, по модулю не превосходящим δ .*

Отсюда сразу получаем:

Лемма 9. *Пусть $A : E \rightarrow E$ — компактный линейный оператор в банаховом пространстве, а $T = I - \lambda A$. Тогда $\dim \text{Ker } T < \infty$.*

Поскольку степени T имеют тот же вид, то

$$\dim \text{Ker } T^n < \infty.$$

Лемма 10. $L = \text{Im } T$ замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим уравнение относительно x :

$$Tx = Ax - x = y. \quad (13)$$

Покажем, что существует такая постоянная $\alpha = \alpha(A)$, что как только уравнение (13) разрешимо, то по крайней мере для одного из его решений выполняется неравенство

$$\|x\| \leq \alpha \|y\|. \quad (14)$$

Пусть x_0 — одно из решений уравнения (13). Тогда любое другое решение его имеет вид $x = x_0 + z$, где z — решение однородного уравнения $Tz = 0$. Рассмотрим непрерывную ограниченную снизу функцию $\varphi(z) = \|x_0 + z\|$. Пусть $d = \inf \varphi(z)$ и $(z_n) \subset N = \text{Ker } T$ — минимизирующая последовательность, то есть

$$\varphi(z_n) = \|x_0 + z_n\| \rightarrow d. \quad (15)$$

Так как последовательность $(x_0 + z_n)$ имеет предел, то она ограничена. Но тогда ограничена и последовательность (z_n) , поскольку

$$\|z_n\| = \|(z_n + x_0) - x_0\| \leq \|x_0 + z_n\| + \|x_0\|.$$

Таким образом, (z_n) — ограниченная последовательность конечномерного пространства и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее так же: $z_n \rightarrow z_0$. Тогда

$$\varphi(z_n) \rightarrow \varphi(z_0).$$

Из этого соотношения и (15) следует, что $\varphi(z_0) = \|x_0 + z_0\| = d$. Следовательно, в случае разрешимости (13) оно всегда имеет решение $x' = x_0 + z_0$ с минимальной нормой. Покажем, что для него выполняется (14).

Рассмотрим отношение $\|x'\|/\|y\|$ для $y \in L$ и предположим, что оно не ограничено. Тогда существуют такие последовательности (y_n) и (x'_n) , что $\|x'_n\|/\|y_n\| \rightarrow \infty$. Поскольку λy_n соответствует, очевидно, минимальное решение $\lambda x'_n$, без ограничения общности можно считать, что $\|x'_n\| = 1$; тогда $\|y_n\| \rightarrow 0$. Так как последовательность (x'_n) ограничена, а оператор A вполне непрерывен, то последовательность (Ax'_n) относительно компактна и, следовательно, содержит сходящуюся подпоследовательность. Снова без ограничения общности можно считать, что

$$Ax'_n \rightarrow x'_0.$$

Но тогда так как $x'_n = Ax'_n - y_n$, то $x'_n \rightarrow x'_0$ и, следовательно,

$$Ax'_n \rightarrow Ax'_0.$$

Таким образом, $Ax'_0 = x'_0$, т.е. $x'_0 \in N$. Поэтому в силу минимальности нормы решения получим, $\|x'_n - x'_0\| \geq \|x'_n\| = 1$, что противоречит сходимости (x'_n) к x'_0 . Итак, отношение $\|x'\|/\|y\|$ ограничено, и если $\alpha = \sup(\|x'\|/\|y\|)$, то требуемое неравенство доказано.

Пусть теперь дана последовательность $(y_n) \subset L$, сходящаяся к y_0 . Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $\|y_n - y_0\| < 1/2^{n+1}$, откуда $\|y_{n+1} - y_n\| < 1/2^n$. Пусть x_0 — минимальное решение уравнения $Tx = y_1$, и x_n ($n = 1, 2, \dots$) — минимальное решение уравнения $Tx = y_{n+1} - y_n$. Тогда

$$\|x_n\| \leq \alpha \|y_{n+1} - y_n\| < \alpha/2^n.$$

Из этой оценки вытекает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ сходится, причем, если x' — сумма этого ряда, то

$$\begin{aligned} Tx' &= T \left(\lim_n \sum_{k=0}^n x_k \right) = \lim_n \sum_{k=0}^n Tx_k = \\ &= \lim_n \left[y_1 + \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k) \right] = \lim_n y_{n+1} = y_0, \end{aligned}$$

и мы получили, что $y_0 \in L$. $\square$

Покажем, что $E_n = \text{Ker } T^n$ и $I_n = \text{Im } T^n$ стабилизируются, причем последнее замкнуто. Тогда по лемме 7 мы получим, что пространство E распадается в прямую сумму (уже в банаховом смысле) A -инвариантных подпространств

$$E = \text{Ker } T^n \oplus \text{Im } T^n, \quad (16)$$

причем на первом из них единственным собственным значением является $1/\lambda$, а на втором такого собственного значения нет.

Домножая A на скаляр, без ограничения общности, можем считать, что $\lambda = -1$, то есть $T = I + A$. Будем рассуждать от противного. Пусть последовательность E_n строго возрастает. Тогда можно по лемме 8 можно выбрать такую последовательность (y_n) , что $y_n \in E_{n+1}$, $\|y_n\| = 1$ и расстояние y_n от E_n не меньше $1/2$. Выбранная последовательность (y_n) такова, что из того, что при $m < n$

$$A(y_n) - A(y_m) = (1 - T)(y_m) - (1 - T)(y_n) = y_m - x,$$

$$x = v(y_m) + (1 - T)(y_n) \in E_m,$$

получаем

$$\|A(y_n) - A(y_m)\| \geq \frac{1}{2} \quad (m \neq n),$$

что вместе с условием $\|y_n\| = 1$ противоречит компактности A . Таким образом, последовательность (E_n) стабилизируется.

Рассмотрим сопряженный оператор $T' = I' + A' : E' \rightarrow E'$.

Задача 42. Доказать, что A' компактен.

Следовательно, к T' применима первая часть рассуждения и $E'_n = \text{Ker } (T')^n = \text{Ker } (T^n)'$ стабилизируется и конечномерно. Заметим, что по теореме Хана-Банаха $y \in \bar{I}_n$ (замыканию) тогда и только тогда, когда $y = \lim T^n x$, тогда и только тогда, когда для любого функционала $f \in E'_n$ имеем $f(y) = f(\lim T^n(x)) = \lim ((T^n)' f)x = 0$. Значит, $\bar{I}_n$ тоже стабилизируются. Теперь достаточно воспользоваться леммой 10, которая верна и для T^n , и откуда следует, что $I_n = \bar{I}_n$.

16. Вращение линейного поля

Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный *линейный* оператор в вещественном банаховом пространстве E . Векторное поле $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}$ на каждой сфере $S \subset E$ с центром в нуле θ пространства E будет нечетным. Если $\frac{1}{\lambda}$ не является собственным числом оператора $\mathbf{A}$, то только θ будет неподвижной точкой поля $\vec{\Phi}$. В силу теоремы 19 вращение поля $\vec{\Phi}$ на S будет нечетным.

Теорема 23. (Лере и Шаудер) *Если $\frac{1}{\lambda}$ не является собственным числом вполне непрерывного линейного оператора $\mathbf{A}$, то вращение линейного ВНВП $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}$ на сфере S равно $(-1)^\beta$, где β — сумма кратностей всех тех собственных чисел μ оператора $\mathbf{A}$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

$$1) \operatorname{sgn} \mu = \operatorname{sgn} \frac{1}{\lambda},$$

$$2) |\mu| > \left| \frac{1}{\lambda} \right|.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что собственные значения вполне непрерывного линейного оператора конечнократны и на указанном промежутке их конечное число (см. в предыдущем параграфе теорему 22 и утверждение после нее), так что формулировка теоремы имеет смысл. Напомним, что числа, обратные собственным, называются характеристическими. Пусть E_1 — прямая сумма всех инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$, отвечающих характеристическим числам этого оператора, расположенным между λ и нулем. Размерность этого инвариантного подпространства E_1 равна β . Пусть $\mu_1, \dots, \mu_s$ — все собственные значения $\mathbf{A}$, лежащие в указанном промежутке. Будем по очереди отщеплять корневые пространства, точнее, поступим следующим образом. Обозначим $N^i = \operatorname{Ker} (\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{A})^{k_i}$, где при k_i наступает стабилизация, $i = 1, \dots, s$. Пусть

$$\begin{aligned} L_1 &= \operatorname{Im} (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})^{k_1}, \\ L_2 &= \operatorname{Im} ((\mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})|L_1)^{k_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ L_{i+1} &= \operatorname{Im} ((\mu_{i+1} \mathbf{I} - \mathbf{A})|L_i)^{k_{i+1}}, \end{aligned}$$

.....

$$L_s = \text{Im}((\mu_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})|L_{s-1})^{k_s}.$$

Тогда положим

$$E_1 = \bigoplus_{i=1}^s N^i, \quad E_2 = L_s.$$

По равенству (16) $E = E_1 \oplus E_2$, они инвариантны, на E_1 у $\mathbf{A}$ собственные значения — $\mu_1, \dots, \mu_s$, а на E_2 — только другие.

Пусть $S_1 = S \cap E_1$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{F}(x, t) = (2t - 1)x - \lambda t \mathbf{A}x \quad (x \in S_1, t \in [0, 1]),$$

которая на S_1 в нуль не обращается, так как при $0 < t < 1$ числа $\frac{t\lambda}{2t-1}$ не лежат в интервале $(0, \lambda)$, поскольку неравенства

$$\frac{t}{2t-1} > 0, \quad \frac{t}{2t-1} < 1, \quad 0 < t < 1$$

противоречивы. Поэтому поля $\vec{\Phi}$ и $-\mathbf{I}$ гомотопны на S_1 , поскольку

$$\mathbf{F}(x, 0) = -x, \quad \mathbf{F}(x, 1) = \vec{\Phi}x \quad (x \in S_1).$$

Значит,

$$\gamma_{\vec{\Phi}|_{S_1}} = (-1)^\beta. \quad (17)$$

Задача 43. Для этого проверьте, что $\deg\{-\text{Id} : S^n \rightarrow S^n\} = (-1)^n$.

Поля

$$\vec{\Phi}_t = \mathbf{I} - t\lambda \mathbf{A} \quad (t \in [0, 1])$$

не имеют на $S_2 = S \cap E_2$ нулевых векторов. Следовательно $\vec{\Phi}$ на S_2 гомотопна $\mathbf{I}$, и

$$\gamma_{\vec{\Phi}|_{S_2}} = 1. \quad (18)$$

Пусть $S_1 = \partial T_1$, $S_2 = \partial T_2$ а $T = T_1 \times T_2 \subset E$. Тогда в силу теоремы 17 вращение поля $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}$ на ∂T равно $(-1)^\beta$.

С другой стороны, как мы установили перед настоящей теоремой, единственной неподвижной точкой $\vec{\Phi}$ в T (и на S) является θ . Из этих двух замечаний мы получаем следующее:

$$\gamma_{\vec{\Phi}|_S} = \text{ind}_\theta(\vec{\Phi}) = \gamma_{\vec{\Phi}|\partial T} = (-1)^\beta. \quad \square$$

Задача 44. Доказать, что вращение поля $\vec{\Phi}$ на границе любой области, содержащей θ , равно $(-1)^\beta$.

Задача 45. Доказать, что вращение линейного ВНВП в комплексном пространстве равно 1.

Указание. Овеществить, убедиться в четнократности собственных чисел и воспользоваться предыдущей теоремой.

17. Вычисление индекса неподвижной точки для дифференцируемых полей

Определение. ВНВП $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ дифференцируемо в точке x_0 , если приращение можно записать в виде

$$\mathbf{F}(x_0 + h) - \mathbf{F}x_0 = \mathbf{A}h + w(x_0, h),$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, а

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|w(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (19)$$

Оператор $\mathbf{A}$ называют *производной Фреше* нелинейного оператора $\mathbf{F}$ в точке x_0 , а $\mathbf{A}h$ — *дифференциалом Фреше* этого оператора.

Лемма 11. Если оператор $\mathbf{F}$ вполне непрерывен, то и оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен.

Доказательство. Если оператор $\mathbf{A}$ не является вполне непрерывным, то множество $\mathbf{A}T$ (T — единичный шар банахова пространства E) некомпактно. Следовательно, существуют такие $\delta > 0$ и последовательность $h_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots$), что

$$\|\mathbf{A}(h_i - h_j)\| > \delta \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots).$$

В силу (19) найдется такое $\rho > 0$, что при $\|h\| < \rho$

$$\|\mathbf{F}(x_0 + h) - \mathbf{F}x_0 - \mathbf{A}h\| < \frac{\delta}{3}\|h\|,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{F}(x_0 + \rho h_i) - \mathbf{F}(x_0 + \rho h_j)\| = \\ & = \|\rho\{\mathbf{A}h_i - \mathbf{A}h_j\} + \{\mathbf{F}(x_0 + \rho h_i) - \mathbf{F}x_0 - \rho\mathbf{A}h_i\} - \\ & \quad - \{\mathbf{F}(x_0 + \rho h_j) - \mathbf{F}x_0 - \rho\mathbf{A}h_j\}\| \geq \\ & \geq \rho\|\mathbf{A}h_i - \mathbf{A}h_j\| - \|\mathbf{F}(x_0 + \rho h_i) - \mathbf{F}x_0 - \rho\mathbf{A}h_i\| - \\ & \quad - \|\mathbf{F}(x_0 + \rho h_j) - \mathbf{F}x_0 - \rho\mathbf{A}h_j\| \geq \\ & \geq \frac{\rho\delta}{3} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Но тогда из последовательности

$$\mathbf{F}(x_0 + \rho h_1), \quad \mathbf{F}(x_0 + \rho h_2), \quad \dots$$

нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что $\mathbf{F}$ вполне непрерывен. $\square$

Теорема 24. (Лере и Шаудер) Пусть x_0 — неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$. Пусть единица не является собственным числом производной Фреше $\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{F}$ в точке x_0 . Тогда x_0 является изолированной неподвижной точкой $\vec{\Phi}$, а индекс этой неподвижной точки равен $(-1)^\beta$, где β — сумма кратностей характеристических чисел оператора $\mathbf{A}$, лежащих на интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Поскольку единица не является собственным числом оператора $\mathbf{A}$, то найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\mathbf{A}\varphi - \varphi\| \geq \alpha\|\varphi\|.$$

В силу (19) можно указать такое $\rho_0 > 0$, что из $\|\varphi\| < \rho_0$ следует, что

$$\|\mathbf{F}(x_0 + \varphi) - \mathbf{F}x_0 - \mathbf{A}\varphi\| \leq \frac{\alpha}{2}\|\varphi\|.$$

Тогда на сферах S_ρ радиуса $\rho \leq \rho_0$ с центром в x_0 поле $\vec{\Phi}$ не имеет нулевых векторов, поскольку

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{F}(x_0 + \varphi) - (x_0 + \varphi)\| \geq \\ & \geq \|\mathbf{A}\varphi - \varphi\| - \|\mathbf{F}(x_0 + \varphi) - x_0 - \mathbf{A}\varphi\| \geq \frac{\alpha}{2} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Таким образом, x_0 — изолированная неподвижная точка поля $\vec{\Phi}$. Индекс этой точки по теореме 23 равен $(-1)^\beta$, поскольку на сфере S_{ρ_0} поле $\vec{\Phi}$ гомотопно полю $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ при помощи семейства векторных полей

$$\vec{\Phi}(\varphi, t) = t \left[x_0 + \varphi - \mathbf{F}(x_0 + \varphi) \right] + (1 - t) \left[x_0 + \varphi - (x_0 + \mathbf{A}\varphi) \right],$$

не имеющего на S_{ρ_0} нулевых векторов при $t \in [0, 1]$. $\square$

Определение. Рассмотрим ВНВП $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$. Пусть в каждой точке x некоторого шара T оператор F имеет производную $\mathbf{A}_x$. Соответствие $x \mapsto \mathbf{A}_x$ задает отображение шара T в пространство вполне непрерывных линейных операторов. Если это отображение непрерывно, то будем говорить, что поле $\vec{\Phi}$ непрерывно дифференцируемо. Оператор $\mathbf{F}$ будем называть непрерывно дифференцируемым.

Теорема 25. Пусть выполнены условия теоремы 24, причем векторное поле $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ непрерывно дифференцируемо в окрестности неподвижной точки x_0 . Пусть $\mathbf{F}_1$ — непрерывно дифференцируемый в окрестности x_0 вполне непрерывный оператор. Тогда найдется такая окрестность T точки x_0 и такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ векторные поля $\vec{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \varepsilon \mathbf{F}_1$ имеют в T единственную неподвижную точку.

Доказательство. Пусть A_x — производная Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке x . По условию теоремы единица не является собственным числом оператора $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x$. Следовательно, как видно из предыдущего параграфа, найдется такое число $\beta > 0$, что

$$\|\mathbf{A}\varphi - \varphi\| \geq \beta \|\varphi\| \quad (\varphi \in E). \quad (20)$$

Тогда для любого вполне непрерывного оператора $\mathbf{D}$, удовлетворяющего условию $\|\mathbf{D}\| < \beta$, единица не будет (в силу (20)) собственным числом оператора $\mathbf{A} + \mathbf{D}$:

$$\|(\mathbf{A} + \mathbf{D})\varphi - \varphi\| \geq \|\mathbf{A}\varphi - \varphi\| - \|\mathbf{D}\varphi\| \geq (\beta - \|\mathbf{D}\|)\|\varphi\|.$$

ВНВП $\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{D}$ будет гомотопен (в силу близости) полю $\mathbf{I} - \mathbf{A}$, и вращение полей $\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{D}$ и $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ на каждой сфере будет одинаковым.

Пусть T — шаровая окрестность неподвижной точки x_0 , в которой нет других неподвижных точек поля $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$, удовлетворяющая условиям

$$\|\mathbf{A}_x - \mathbf{A}\| < \frac{\beta}{2}, \quad \|\mathbf{B}_x\| < K = \text{const} \quad (x \in T), \quad (21)$$

где $\mathbf{B}_x$ — производная Фреше оператора $\mathbf{F}_1$ в точке $x \in T$. Этого можно добиться в силу непрерывной дифференцируемости $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$. Пусть $\partial T = S$. Поле $\vec{\Phi}$ на S не имеет нулевых векторов, поэтому найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\mathbf{F}x - x\| > \alpha \quad (x \in S).$$

Пусть

$$M = \sup_{x \in T} \|\mathbf{F}_1\|, \quad \varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{\alpha}{2M}, \frac{\beta}{2K} \right\}.$$

Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_0$ поле $\vec{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \varepsilon\mathbf{F}_1$ гомотопен на S полю $\vec{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ и, следовательно, его вращение равно вращению $\vec{\Phi}$, которое, в свою очередь, равно индексу его единственной в T неподвижной точки x_0 , который по теореме 24 равен вращению $\gamma = \pm 1$ линейного поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ на любой сфере. Таким образом, по общему принципу Лере — Шаудера поле $\vec{\Phi}_\varepsilon$ имеет в шаре неподвижные точки. Пусть y — одна из них. ВНВП $\vec{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \varepsilon\mathbf{F}_1$ непрерывно дифференцируемо. Производная Фреше оператора $\mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{F}_1$ равна $\mathbf{A}_y + \varepsilon\mathbf{B}_y$. Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{A}_y - \mathbf{A}_x - \varepsilon\mathbf{B}_y$. Так как $\|\varepsilon\mathbf{B}_y\| < \frac{\beta}{2}$, то в силу (21)

$$\|\mathbf{D}\| \leq \|\mathbf{A}_y - \mathbf{A}\| + \|\varepsilon\mathbf{B}_y\| < \beta.$$

Значит, по рассуждению из начала доказательства, единица не является собственным числом оператора $\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{A}_y + \varepsilon \mathbf{B}_y$. Тогда по теореме 24 неподвижная точка y изолирована и ее индекс равен вращению поля $\mathbf{I} - (\mathbf{A}_y + \varepsilon \mathbf{B}_y)$, которое гомотопно $\mathbf{I} - \mathbf{A}$. Таким образом, все неподвижные точки поля $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ в T изолированы и индексы их одинаковы (равны γ). Эти точки, как указывалось ранее, образуют компактное множество и из изолированности следует, что их конечное число: $y_1, \dots, y_s$. Значит, сумма их индексов равна $s\gamma$. С другой стороны, она равна вращению поля $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ на S , то есть γ . Следовательно, $s = 1$. $\square$

Литература

- [1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*, М.: Наука, 1979.
- [2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Наука, 1981.
- [3] Красносельский М.А. *Топологические методы теории нелинейных интегральных уравнений*, М.: ГИТТЛ, 1956.
- [4] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа*, М.: Высшая школа, 1982.
- [5] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
- [6] Хирш М. *Дифференциальная топология*, М.: Мир, 1979.
- [7] Эдвардс Р. *Функциональный анализ*, М.: Мир, 1969.