

**Задачи для семинара № 1**  
**Дифференциальная геометрия и топология**  
**Мехмат МГУ, осень 2022**

**Гладкие регулярные (неособые) кривые и поверхности  
в  $\mathbb{R}^n$ , заданные параметрически или неявно.**

**Задача 1.** Доказать, что стандартная сфера  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  радиуса  $R$  является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

**Задача 2.** Доказать, что  $\mathrm{SO}(3)$  — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных  $3 \times 3$ -матриц. Аналогичный вопрос для группы  $\mathrm{O}(n)$ . Какова размерность этих групп?

**Задача 3.** Доказать, что  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  — регулярная гладкая гиперповерхность в пространстве  $n \times n$ -матриц.

**Задача 4.** Задать тор вращения как гладкую параметризованную и как гладкую неявно заданную гиперповерхность  $f(x, y, z) = 0$  в  $\mathbb{R}^3$ . Неособа ли эта поверхность?

**Задача 5\*.** Описать множество ортонормированных  $k$ -реперов с началом в точке  $(0, \dots, 0)$  в  $\mathbb{R}^n$  как неявно заданную поверхность в аффинном пространстве  $k \times n$ -матриц. Доказать, что эта поверхность гладкая и регулярная, найти её размерность. Эта поверхность называется многообразием Штифеля  $V_k(\mathbb{R}^n)$ . Что можно сказать про  $V_1(\mathbb{R}^n)$  и  $V_n(\mathbb{R}^n)$ ?