

Задачи для семинара № 1
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022

**Гладкие регулярные (неособые) кривые и поверхности
в \mathbb{R}^n , заданные параметрически или неявно.**

Задача 1. Доказать, что стандартная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R является регулярной неявно заданной гладкой поверхностью в аффинном пространстве. Какова её размерность? Какие можно выбрать локальные координаты?

Задача 2. Доказать, что $SO(3)$ — регулярная гладкая неявно заданная поверхность в пространстве вещественных 3×3 -матриц. Аналогичный вопрос для группы $O(n)$. Какова размерность этих групп?

Задача 3. Доказать, что $SL(n, \mathbb{R})$ — регулярная гладкая гиперповерхность в пространстве $n \times n$ -матриц.

Задача 4. Задать тор вращения как гладкую параметризованную и как гладкую неявно заданную гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в \mathbb{R}^3 . Неособа ли эта поверхность?

Задача 5*. Описать множество ортонормированных k -реперов с началом в точке $(0, \dots, 0)$ в \mathbb{R}^n как неявно заданную поверхность в аффинном пространстве $k \times n$ -матриц. Доказать, что эта поверхность гладкая и регулярная, найти её размерность. Эта поверхность называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Что можно сказать про $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?