Задачи для семинара № 2
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022

Гладкие многообразия, гладкие функции

Задача 1. Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ и два атласа: первый задаётся с помощью стереографических проекций из южного и северного полюсов, а другой с помощью параметризаций открытых полусфер через пару координат в трёхмерном евклидовом пространстве (например, в верхней полусфере в качестве координат используются x и y). Докажите, что это действительно атласы, то есть карты удовлетворяют определению карт и согласованы. Эквивалентны ли эти два атласа?

Задача 2. Рассмотрим на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

функцию $f(x, y, z) = z$. Запишите эту функцию в локальных координатах u, v, соотвествующих стереографической проекции из северного полюса. Запишите эту функцию в локальных координатах $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, соотвествующих стереографической проекции из южного полюса. Сделайте замену переменных и убедитесь, что

$$f(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) = f(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Что обозначает буква f в правой и левой части этого равенства?

Задача 3. Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ не эквивалентны, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

Задача 4. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и карту на нём, заданную формулами

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ z = r\sin\varphi, \end{cases}$$

где, например, $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Запишите отображение N в координатах φ, ψ на $\mathbb{T}^2$ и u, v на $\mathbb{S}^2$. Является ли отображение Гаусса гладким?

Задача 5*. Множество k-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

Задача 6*. Введите однородные и неоднородные комплексные координаты на $\mathbb{CP}^1$. Докажите, что $\mathbb{CP}^1$ является (вещественным) гладким двумерным многообразием. Доказажите, что как вещественное многообразие $\mathbb{CP}^1$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2$. *Указание: если в координатах на сфере, введённых с помощью стереографической проекции, положить $z = u + iv$, $w = \tilde{u} - i\tilde{w}$, то отображение склейки принимает вид*

$$z = \frac{1}{w}$$

(проверьте!)

Задача 7*. Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.