

**Задачи для семинара № 3**  
**Дифференциальная геометрия и топология**  
**Мехмат МГУ, осень 2022**

**Гладкие отображения. Касательные векторы**

**Задача 1.** Рассмотрим отображение  $F : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ , которое в стереографических координатах  $u$  и  $v$ , полученных проекцией из северного полюса  $N$ , задаётся формулой  $z \mapsto z^2$ , где  $z = u + iv$ . Гладкое ли это отображение? Запишите его в стереографических координатах  $s$  и  $t$ , полученных проекцией из южного полюса, а также в терминах  $w = s - it$ . Продолжается ли это отображение в северный полюс? Будет ли оно гладким на всей сфере, включая полюса?

**Задача 2.** Рассмотрим окружность  $\mathbb{S}^1$ , заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку  $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Какова размерность касательного пространства  $T_P \mathbb{S}^1$ ? Найти какой-либо базис в касательном пространстве  $T_P \mathbb{S}^1$ .

**Задача 3.** (а) Описать в терминах объемлющего пространства  $\mathbb{R}^3$  касательное пространство  $T_P \mathbb{S}^2$  к сфере  $\mathbb{S}^2$ , заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке  $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .

(б) Пусть  $u$  и  $v$  обозначают стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса. Найти координаты точки  $P$ .

(в) Найти координаты базисных векторов  $\frac{\partial}{\partial u}$  и  $\frac{\partial}{\partial v}$  пространства  $T_P \mathbb{S}^2$  в стандартном базисе объемлющего пространства  $\mathbb{R}^3$ .

(г) Рассмотрим вектор  $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P \mathbb{S}^2$ . Найти его координаты в базисе  $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$ , где  $s$  и  $t$  обозначают стереографические координаты, полученные проекцией из южного полюса.

(д) Пусть  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ограничение функции  $x + y + z$  на сферу. Найти  $\partial_V f$ .

**Задача 4.** Найти касательное пространство к  $\mathrm{SO}(3)$  в а) точке  $E$ , б) точке

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$