**Задачи для семинара № 4**
**Дифференциальная геометрия и топология**
**Мехмат МГУ, осень 2022**

## Касательные векторы, векторные поля, коммутатор векторных полей, дифференциал отображения

**Задача 1.** Рассмотрим отображение $F : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, которое в стереографических координатах $u$ и $v$, полученных проекцией из северного полюса $N$, задаётся формулой $z \mapsto z^2$, где $z = u + iv$. Рассмотрим точку $P$ с координатами $u = 1$, $v = 1$ и вектор $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \in T_P\mathbb{S}^2$. Найти $d_PF(V)$. Найти дифференциал $F$ в произвольной точке в координатах $u$, $v$, а также в стереографических координатах $s$ и $t$, полученных проекцией из южного полюса.

**Задача 2.** Рассмотрим стандартное отображение $p : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$, сопоставляющее точке $A$ на сфере точку проективной плоскости, отвечающей проходящей через $A$ прямой. Рассмотрим на сфере стереографические координаты $u$ и $v$, полученных проекцией из северного полюса $N$, а на проективной плоскости однородные координаты $[z^0 : z^1 : z^2]$ и неоднородные координаты $x^1 = \dfrac{z^1}{z^0}$, $x^2 = \dfrac{z^2}{z^0}$ в аффинной карте $U_0$. Записать отображение $p$ в координатах $u$, $v$ и $x^1$, $x^2$. Найти дифференциал $p$ в произвольной точке сферы в этих координатах.

**Задача 3.** Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Записать векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = r\frac{\partial}{\partial \varphi}$ в декартовых координатах и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в обеих системах координат. Убедиться, что результат не зависит от выбора локальных координат.

**Задача 4.** Пусть $M$ — регулярная гладкая $k$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пусть $X$ и $Y$ — векторные поля на $\mathbb{R}^n$, определённые в некоторой окрестности $M$, касательные к $M$, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $X(P), Y(P) \in T_PM$. Докажите, что тогда $[X, Y]$ тоже касается $M$, то есть для любой точки $P \in M$ выполняется $[X, Y](P) \in T_PM$.

**Задача 5.** Докажите, что $[X, fY] = Xf \cdot Y + f \cdot [X, Y]$.

**Задача 6.** Является ли образ гладкого векторного поля при гладком отображении гладким векторным полем?

**Задача 7.** Проверьте, сохраняется ли коммутатор векторных полей при отображениях многообразий. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ локальный диффеоморфизм, $X, Y$ векторные поля на $M$. Верно ли, что тогда $d\varphi_p[X, Y] = [d\varphi_p X, d\varphi_p Y]$?