Задачи для семинара № 5
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022

Дифференциал отображения, дифференциал функции, дифференциальные формы

Задача 1. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $F : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p, что отображение $F : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом U на открытое множество $F(U)$.

Задача 2. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть u и v — стереографические координаты, полученные проекцией из северного полюса. Рассмотрим векторное поле $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ и функцию $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, являющуюся ограничением функции $x + y + z$ на сферу. Найти координаты дифференциала df в базисе du, dv. Используя полученный ответ, вычислить $df(V)$. Сравнить результат с $\partial_V f$.

Задача 3. Рассмотрим тор вращения $\mathbb{T}^2$ и такую карту (U, α) на нём, что α^{-1} задаётся формулами

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \\ x = r\sin\varphi, \end{cases}$$

а U — неравенствами $\varphi \in (0, \pi)$, $\psi \in (0, \pi)$.

Рассмотрим отображение Гаусса $N : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, которое точке $p \in \mathbb{T}^2$ сопоставляет внешнюю единичную нормаль $N(p) \in \mathbb{S}^2$ к тору в точке p. Рассмотрим на сфере стереографические координаты u, v, полученные проекцией из северного полюса. Для произвольной точки $A \in \mathbb{T}^2$ найдите $d_AN\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ и $d_AN\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)$ в координатах u v. Найдите матрицу дифференциала отображения N в базисах $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial\psi}$ и $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$.

Задача 4. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 5. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 6. Пусть $F : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $F(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ F, \ldots, x^l \circ F$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p.