Задачи для семинара № 6
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022

Дифференциальные формы и операции с ними - I

Задача 1. Доказать, что нет нетривиальных кососимметрических полилинейных функций на векторном пространстве V от k аргументов, если $k > \dim V$.

Задача 2. Пусть V векторное пространство размерности n. Найти размерность пространства $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций на V от k аргументов.

Задача 3. Доказать, что если для любой гладкой 1-формы ω функция $\omega(X)$ является гладкой, то векторное поле X является гладким.

Задача 4. Рассмотрим 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_k$ и векторные поля $X_1, \ldots, X_k$. Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(X_1, \ldots, X_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(X_1) & \ldots & \omega_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_k(X_1) & \ldots & \omega_k(X_k) \end{vmatrix}.$$

Задача 5. Доказать, что если дифференциальные 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$. Верно ли обратное? Что можно сказать про k-формы?

Задача 6. Найти $d\omega$, $\iota_X\omega$ и $\omega \wedge (dx + dy + dz)$, если

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad \omega = x^2 dx \wedge dy + xz dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

Задача 7. Найти $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Найти ограничение $\omega|_{\mathbb{S}^1}$ формы ω на окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 8. Записать в полярных координатах дифференциальные формы

$$\omega = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \quad \sigma = \sqrt{x^2 + y^2} dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).$$

Задача 9. Пусть Ω дифференциальная p-форма, а ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 10*. Записать форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ в сферических координатах.