Задачи для семинара № 7
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022

Дифференциальные формы и операции с ними - II

Задача 1. Пусть r, φ полярные координаты в плоскости. Доказать, что, хотя координата φ определена с точностью до добавления кратного 2π и не является определённой на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ функцией, её дифференциал $d\varphi$ является корректно определённой 1-формой на $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Записать $d\varphi$ в декартовых координатах.

Задача 2. На лекции было доказано, что производная Ли 1-формы ω вдоль векторного поля Y может быть в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ найдена так: если

$$\omega = \omega_i \, dx^i, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

то

$$L_Y \omega = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} Y^j + \omega_l \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

Вывести аналогичную формулу для производной Ли k-формы

$$\sigma = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sigma_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Задача 3. Найти интегральные кривые векторного поля $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ на плоскости.

Задача 4. Найти производную Ли формы $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ вдоль векторного поля $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ разными способами:

а) по определению, используя решение задачи 3,

б) с помощью явной формулы из задачи 2,

в) используя свойства производной Ли, свести к вычислению производной Ли от функций.

Задача 5. Найти $d(\iota_Z \omega) + \iota_Z(d\omega)$ для $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ и $Z = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ и сравнить с $L_Z \omega$, вычисленной в предыдущей задаче.

Задача 6. Доказать, что

$$[L_X, \iota_Y]\omega = \iota_{[X,Y]}\omega.$$

Задача 7. Доказать, что

$$L_{fX}\omega = f L_X \omega + df \wedge \iota_X \omega,$$

где f — гладкая функция.