Задачи для семинара № 8
Дифференциальная геометрия и топология
Мехмат МГУ, осень 2022

Дифференциальные формы и тензоры

Задача 1. Найти производную Ли $L_X Y$ для векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Задача 2. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $d\omega(X, Y)$ с помощью формулы вычисления внешнего дифференциала формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 3. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Найти $(L_Y\omega)(X)$ с помощью формулы вычисления производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 4. Пусть V векторное пространство с базисом $e_1, \dots, e_n$, а $e^1, \dots, e^n$ соответствующий двойственный базис в V^*. Доказать, что тогда полилинейные функции

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},$$

где $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n$, образуют базис в пространстве $T^p_q V$ тензоров типа $\binom{p}{q}$, то есть пространстве полилинейных функций от p ковекторов и q векторов. Какова размерность пространства $T^p_q V$?

Задача 5. Пространство $\bigwedge^k V^*$ кососимметрических полилинейных функций от k векторов из векторного пространства V является подпространством пространства тензоров $T^0_k V$. Доказать, что связь между базисами в этих пространствах выражается формулой

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}\pi\, e^{i_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi(k)}}.$$

Задача 6. Пространство S^2V^* симметрических полилинейных функций от 2 векторов из векторного пространства V, то есть симметрических билинейных форм, является подпространством пространства тензоров $T^0_2 V$. Доказать, что в качестве базиса в S^2V^* можно взять

$$e^i \cdot e^j = \frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

Какова размерность пространства S^2V^*?

Задача 7. Мы определяли тензоры как полилинейные функции от ковекторов и векторов, а тензорное произведение формулой

$$(S_1 \otimes S_2)(\xi_1, \dots, \xi_{p_1+p_2}, v_1, \dots, v_{q_1+q_2}) =$$
$$= S_1(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, v_1, \dots, v_{q_1}) S_2(\xi_{p_1+1}, \dots, \xi_{p_1+p_2}, v_{q_1+1}, \dots, v_{q_1+q_2}).$$

Вывести из этого, что для координат этих тензоров верно равенство

$$(S_1 \otimes S_2)^{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}_{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}} = (S_1)^{i_1,\dots,i_{p_1}}_{j_1,\dots,j_{q_1}} (S_2)^{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}_{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}.$$

Задача 8. Пусть T_{ij} тензор типа $\binom{0}{2}$ такой, что $\det T_{ij} \neq 0$. Пусть T^{ij} обозначает элементы матрицы, обратной к T_{ij}. Доказать, что тогда T^{ij} является тензором типа $\binom{2}{0}$.