## Задачи для семинара № 9
## Дифференциальная геометрия и топология
## Мехмат МГУ, осень 2022

### Тензоры, риманова метрика

**Задача 1.** Проверить, что свёртка тензора по паре индексов не зависит от выбора базиса.

**Задача 2.** Вывести формулу преобразования координат (компонент) тензорного поля при замене локальных координат на многообразии.

**Задача 3.** Проверить, что $L_X(fT \otimes S) = L_X(T \otimes fS)$, где $f$ гладкая функция, то есть определение производной Ли тензорного поля корректно.

**Задача 4.** Пусть $A = A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ поле операторов, а $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ векторное поле. Найти явную формулу для производной Ли $L_X A$.

**Задача 5.** Пусть $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ риманова метрика, а $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ векторное поле. Найти явную формулу для производной Ли $L_X g$.

**Задача 6.** Приведите пример изометрического отображения римановых многообразий, не являющегося изометрией.

**Задача 7.** Пусть $X$ векторное поле. Доказать, что если локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\Phi^t_X$ состоит из изометрий, то $L_X g = 0$.

**Задача 8.** Векторное поле $X$ на римановом многообразии $(M, g)$ называется киллинговым, если $L_X g = 0$. Доказать, что на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат $Oxy$ векторные поля

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

являются киллинговыми. Доказать, что линейная комбинация двух киллинговых векторных полей тоже является полем Киллинга. Вывести из этого, что векторное поле $Z = X + Y$ тоже киллингово. Найти соответствующие векторным полям $X$, $Y$ и $Z$ однопараметрические группы диффеоморфизмов.