Задача 1. Привести пример инволютивной банаховой алгебры, не являющейся C^*-алгеброй.

Задача 2. Показать, что левый единичный элемент является и правым, что $1^* = 1$, что единичный элемент единствен и что $\|1\| = 1$. Он называется *единицей алгебры.*

Задача 3. Проверьте, что алгебра $C(X)$, образованная всеми непрерывными комплекснозначными функциями на компактном пространстве X и алгебра $C_0(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве X, стремящихся к 0 на бесконечности (то есть таких $f : X \to \mathbb{C}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subseteq X$, что $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} < \varepsilon$) являются коммутативными C^*-алгебрами, если в качестве нормы берется *супремум-норма*: $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, а в качестве умножения — поточечное умножение. При этом алгебра $C(X)$ имеет единицу.

Задача 4. Проверьте, что алгебра $\mathbb{B}(H)$ всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, является C^*-алгеброй с единицей. Здесь в качестве нормы берется *операторная норма* $\|a\| = \sup_{h \in H,\, \|h\| \leq 1} \|a(h)\|$, а умножение — композиция операторов.

Задача 5. Показать, что норма "суммы" превращает A^+ в инволютивную банахову алгебру, но не C^*-алгебру.

Задача 6. Доказать, что A — идеал в A^+.

Задача 7. Доказать, что если $a_0 \in A$ обратим и $\|a - a_0\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$, то a тоже обратим, причем $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_0^{-1}(a_0 - a)]^n a_0^{-1}$.

Задача 8. Показать, что квазиспектр всегда содержит ноль.

Задача 9. Пусть a и b — коммутирующие элементы банаховой алгебры. Тогда произведение ab обратимо тогда и только тогда, когда каждый из элементов a и b является обратимым.

Задача 10. Показать, что $r(a) \leq \|a\|$ для любого $a \in A$.

Задача 11. Доказать, что M_A — локально-компактное хаусдорфово пространство, а M_{A^+} — его одноточечная компактификация.

Задача 12. Проверить, что если $\varphi : A \to \mathbb{C}$ — (ненулевой) мультипликативный функционал на A, то формула $\widetilde{\varphi}((a, \lambda)) = \varphi(a) + \lambda$ задает единственное продолжение φ до мультипликативного функционала на A^+.

Задача 13. Любой идеал I коммутативной банаховой алгебры с единицей содержится в некотором максимальном идеале.

Задача 14. Доказать теорему Гельфанда для алгебры без единицы.

Задача 15. Если a — обратимый элемент, то алгебра $C^*(a)$ имеет единицу. В этом случае $C^*(a) = C^*(1, a)$.

Задача 16. Доказать, что $f(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(f(a))$, приближая f многочленами, и правильно сформулировав, что значит, что образ непрерывен при равномерном приближении, и пользуясь изометричностью преобразования Гельфанда.

Задача 17. Показать, что если $a \geqslant 0$ и $0 \geqslant a$, то $a = 0$; а также, что $-\|a\|1 \leqslant a \leqslant \|a\|1$ для всякого самосопряженного a.

Задача 18. Если $0 \leqslant a \leqslant b$, то $\|a\| \leqslant \|b\|$.

Задача 19. Доказать, что алгебра со счетной аппроксимативной единицей не обязана быть сепарабельной.

Задача 20. Доказать, что положительный элемент произвольной C^*-подалгебры является положительным элементом всей алгебры.

Задача 21. Пусть $\varphi : A \to B$ — $*$-гомоморфизм алгебр без единицы. Доказать, что существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi^+ : A^+ \to B^+$, продолжающий φ.

Задача 22. Пусть $\varphi : A \to B$ — $*$-гомоморфизм алгебр, причем A без единицы, а B — с единицей. Доказать, что существует единственный унитальный $*$-гомоморфизм $\varphi^{(+)} : A^+ \to B$, продолжающий φ.

Задача 23. Проверить, что

- Если S — самосопряженное, то и S' тоже.
- Коммутант любого множества — алгебра с единицей.
- Коммутант любого множества слабо замкнут.
- Таким образом, S' — алгебра фон Неймана для любого самосопряженного множества S.
- Если $S_1 \subset S_2$, то $S_1' \supset S_2'$.
- Всегда $S \subset S''$.
- Поэтому $S' = S'''$, $S'' = S''''$ и т.д.

Задача 24. Доказать: если самосопряженный элемент a в C^*-алгебре с единицей имеет $\mathrm{Sp}(a) = \{0, 1\}$, то a — нескалярный идемпотент.

Задача 25. Пусть u_λ, $\lambda \in \Lambda$, — некоторая аппроксимативная единица в унитальной алгебре. Доказать, что $1 = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$.

Задача 26. Имеется естественная биекция между самосопряженными линейными функционалами на A и (вещественными) линейными функционалами на A_{sa}.

Задача 27. Если у A есть единица, то представление π является невырожденным тогда и только тогда, когда $\pi(1) = 1$.

Задача 28. Доказать, что матричная алгебра M_n является простой при любом n .

Задача 29. Доказать, что образ матричной алгебры M_n при $*$-гомоморфизме — либо нулевая алгебра, либо алгебра, изоморфная M_n.

Задача 30. Нарисовать диаграмму Браттели для (некоторой определяющей последовательности) AF-алгебры: алгебры компактных операторов $\mathbb{K}(H)$.

Задача 31. Нарисовать диаграмму Браттели для (некоторой определяющей последовательности) AF-алгебры: унитализации $\mathbb{K}(H)^+$ алгебры компактных операторов $\mathbb{K}(H)$

Задача 32. Нарисовать диаграмму Браттели для (некоторой определяющей последовательности) AF-алгебры: замыкание объединения $A_p = M_{2^p}$, с вложениями $A_p \subset A_{p+1}$ кратности 2 по формуле $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (CAR алгебра).

Задача 33. Нарисовать диаграмму Браттели для (некоторой определяющей последовательности) AF-алгебры: $C(K)$, где K — канторово множество, полученное из $[0,1]$ последовательными удалениями средней трети соответствующих интервалов. Если K_p — множество, полученное на p-м шаге этого процесса, то A_p — алгебра непрерывных функций, постоянных на интервалах K_p.

Задача 34. Нарисовать диаграмму Браттели для (некоторой определяющей последовательности) AF-алгебры: $C(X)$, где $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, а A_k состоит из всех функций, постоянных на $[0, 1/2^k]$.

Задача 35. Пусть $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ — вырожденное представление. Обозначив через H_0 инвариантное подпространство $H_0 := \{\xi \in H \colon \pi(a)(\xi)0$ для любого $a \in A\}$. Доказать, что π индуцирует представление $\pi' : A \to \mathbb{B}(H/H_0)$, причем, если π было точным представлением (инъективным гомоморфизмом), то и π' будет таковым.

Задача 36. Проверить, что $RM(A) = (LM(A))^*$ и что $M(A) = LM(A) \cap RM(A)$, так что $M(A)$ симметрично по отношению к инволюции.

Задача 37. Пусть X — локально-компактное пространство, а $C_0(X)$, как и ранее — C^*-алгебра непрерывных функций, стремящихся к 0 на бесконечности. Доказать, что алгебра $M(C_0(X)) \subset L^\infty(X)$ может быть отождествлена с C^*-алгеброй $C_b(X)$ всех ограниченных непрерывных функций на X.

Задача 38. Доказать, что представление $\pi : A \to \mathbb{B}(H)$ невырождено тогда и только тогда, когда для некоторой аппроксимативной единицы u_λ алгебры A выполнено следующее условие: для любого вектора $\xi \in H$ найдется такое λ, что $u_\lambda(\xi) \neq 0$.

Задача 39. Построить пример оператора в гильбертовом модуле, не допускающего сопряженного.

Задача 40. Доказать, что $\|x\| = \sup_{y \in B_1(M)} |\langle x, y\rangle|$, где $B_1(M) \subset M$ — единичный шар.

Задача 41. Доказать, что $\theta_{x,y} \in \mathbb{B}_A^\star(M)$, предъявив явную формулу для сопряженного.

Задача 42. Доказать, что $\mathbb{K}_A(M)$ — идеал в $\mathbb{B}_A^\star(M)$.

Задача 43. Доказать, что $\mathbb{K}_A(A) = A$. Заметим, что если A без единицы, то $\mathbb{K}_A(A) = A \neq \mathbb{B}_A^\star(A) = DC(A)$ (алгебра двойных централизаторов).

Задача 44. Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$, $p, q \in A$ — ортогональные проекторы (т.е. самосопряженные идемпотенты, удовлетворяющие $pq = 0$). Показать, что если a положителен и $pap = 0$, то $paq = 0$.

Задача 45. Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$. Обозначим через aAa множество всех элементов вида aba, где $b \in A$, а через $\overline{aAa}$ — замыкание этого множества. C^*-подалгебра $B \subset A$ *наследственна*, если из условий $0 \leq a \leq b$ и $b \in B$ следует, что $a \in B$.

(1) Проверить, что $\overline{aAa}$ — C^*-подалгебра для любого $a \in A$.
(2) Пусть $p \in A$ — проектор. Проверить, что pAp замкнуто.
(3) Показать, что pAp наследственна для любого проектора p.
(4) Показать, что $\overline{aAa}$ наследственна для любого положительного $a \in A$.

Задача 46. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество точек $1, 1/2, 1/3, \dots$ и 0. Пусть $C(X, M_2)$ — множество всех непрерывных функций на X со значениями в матричной алгебре M_2. Положим $B_1 = \{f \in C(X, M_2) : f(0)$ диагональна$\}$, $B_2 = \{f \in C(X, M_2) : f(0)$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.
(1) Показать, что $C(X, M_2)$, B_1, B_2 — C^*-алгебры.
(2) Найти все (двухсторонние, замкнутые) идеалы в $C(X)$, $C(X, M_2)$, B_1, B_2.

Задача 47. Пусть A — C^*-алгебра, $J \subset A$ — идеал, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что существует такой $j \in J$, что $\|[a]\| = \|a - j\|$, где $[a] \in A/J$ — класс $a + J$ элемента a. Указание: разложить $a - \|[a]\| \cdot 1 = a_+ - a_-$ с положительными a_+, a_- и показать, что $a_+ \in J$.

Задача 48. Пусть A — C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Показать, что если спектр $\sigma(a)$ — бесконечное множество, то A бесконечномерна.

Задача 49. Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры $C[0, 1]$ и для положительного линейного функционала φ
(1) $\varphi(f) = f(0)$,
(2) $\varphi(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$,
(3) $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$,
где $f \in C[0, 1]$.

Задача 50. Описать ГНС-конструкцию для C^*-алгебры M_n комплексных $n \times n$-матриц и для положительного линейного функционала φ
(1) $\varphi(A) = a_{11}$,
(2) $\varphi(A) = \mathrm{tr}(A)$,
где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$.

Задача 51. Пусть π, σ — представления C^*-алгебры A в гильбертовых пространствах H_π и H_σ, и пусть частичная изометрия $U : H_\pi \to H_\sigma$ удовлетворяет равенству $\sigma(a)U = U\pi(a)$ для любого $a \in A$. Показать, что образ (соотв. ортогональное дополнение к ядру) U является инвариантным подпространством для $\sigma(A)$ (соотв. для $\pi(A)$). (U — частичная изометрия, если U^*U и UU^* являются проекторами)

Задача 52. (a) Пусть $M_n(A)$ — множество всех $n \times n$-матриц с коэффициентами из C^*-алгебры A. Показать, что на $M_n(A)$ существует C^*-норма.
(b) Пусть A — C^*-алгебра с нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\|\cdot\|'$ — другая норма на A, эквивалентная первой норме. Показать, что если $\|\cdot\|'$ — C^*-норма, то обе нормы совпадают. Вывести из этого единственность C^*-нормы на $M_n(A)$.

Задача 53. Пусть φ — состояние на C^*-алгебре A. Предположим, что для некоторого самосопряженного элемента $a \in A$ выполнено равенство $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Показать, что из этого следует, что $\varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любого $b \in A$.

Задача 54. Пусть $A = c$ — C^*-алгебра сходящихся последовательностей комплексных чисел, $c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}; \lim_{n\to\infty} a_n$ существует$\}$. Рассмотрим ее как C^*-подалгебру алгебры $\mathbb{B}(l_2)$ ограниченных операторов гильбертова пространства l_2 суммируемых с квадратом последовательностей. Найти первый и второй коммутант, A' и A'', и (независимо) слабое замыкание A в $\mathbb{B}(l_2)$.

Задача 55. (a) Показать, что слабая топология строго слабее сильной топологии.
(b) Пусть $P \subset \mathbb{B}(H)$ — множество всех (самосопряженных) проекторов в гильбертовом пространстве. Показать, что если $p_\lambda \to p$ слабо сходится, где $p_\lambda \in P$ и $p \in P$, то $p_\lambda \to p$ сильно сходится.
(c) Показать, что сильный предел последовательности (самосопряженных) проекторов является проектором.
(d) Найти пример слабо сходящейся направленности $p_\lambda \to p$ с $p_\lambda \in P$ и $p \notin P$.

Задача 56. Пусть $H_n \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H, порожденное первыми n векторами ортонормированного базиса. В множестве всех последовательностей $(m_1, m_2, \ldots)$, где $m_k \in \mathbb{B}(H_n) \subset \mathbb{B}(H)$, рассмотрим подмножество A всех таких последовательностей, что

- $\sup_k \|m_k\| < \infty$;
- последовательности $(m_1, m_2, \ldots)$ и $(m_1^*, m_2^*, \ldots)$ являются сходящимися в сильной топологии.

Показать, что A — C^*-алгебра, и что отображение $(m_1, m_2, \ldots) \mapsto$ $s\text{-}\lim_{k\to\infty} m_k \in \mathbb{B}(H)$ является сюръективным $*$-гомоморфизмом $A \to \mathbb{B}(H)$.

Задача 57. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, π — ее неприводимое представление в гильбертовом пространстве H. Показать, что $\dim H = 1$.

Задача 58. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис гильбертова пространства H, и пусть операторы a, b задаются равенствами $ae_i = e_{2i}$; $be_i = e_{2i-1}$. Пусть $E = C^*(a, b) \subset \mathbb{B}(H)$ — C^*-алгебра, порожденная a и b.

(a) Проверить ограниченность a и b и доказать равенства $a^*a = b^*b = 1$, $aa^* + bb^* = 1$.

(b) Доказать, что E не изоморфна полной групповой C^*-алгебре $C^*(G)$ ни для какой группы G.

Задача 59. Рассмотрим $C[0,1]$ как C^*-подалгебру в $\mathbb{B}(H)$, где $H = L^2([0,1])$ (непрерывные функции действуют на H умножением).

(a) Проверить, что $C[0,1] \cap \mathbb{K}(H) = 0$;
(b) Пусть φ — линейный функционал на $C[0,1]$, определенный равенством $\varphi(f) = f(0)$, $f \in C[0,1]$. Найти такую слабо сходящуюся к нулю в H последовательность $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ векторов единичной длины, что выполняется $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty}\langle fe_n, e_n\rangle$ для любой функции $f \in C[0,1]$.

Задача 60. Операторы a, b в гильбертовом пространстве H называются *компалентными*, если существует такой унитарный оператор $u \in \mathbb{B}(H)$, что $u^*au - b \in \mathbb{K}(H)$. Показать, что если самосопряженные операторы a, b компалентны, то совпадают их существенные спектры.

Задача 61. Показать, что любая AF C^*-алгебра без единицы имеет аппроксимативную единицу, состоящую из возрастающей последовательности проекторов.

Задача 62. (1) Показать, что $C[0,1]$ не является AF-алгеброй.

(2) Построить инъективный $*$-гомоморфизм $C[0,1]$ в AF-алгебру $C(K)$ непрерывных функций на канторовом множестве K. Указание: построить функцию f на K, принимающую все рациональные значения из $[0,1]$ и показать, что $C^*(f)$ изометрично $*$-изоморфна $C(\mathrm{Sp}(f)) = C[0,1]$.

Задача 63. Пусть $A_n = M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C})$, а вложение $\alpha_n : A_n \to A_{n+1}$ задано формулой $\alpha_n : \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right)$, где $a_1, a_2 \in M_{2^n}(\mathbb{C})$.

(1) Определить диаграмму Браттели для AF-алгебры $A = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$;

(2) Выяснить, есть ли в A единица.

Задача 64. Найти $M(A)$, где $A = \{f \in C([0,1]; M_2) : f(0)_{11} = f(0)_{12} = f(0)_{21} = 0; f(1) = 0\}$ (здесь M_2 — алгебра двумерных матриц).