ЗАДАЧИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

(список обязательных задач по курсу Е. В. Троицкого, 3-й курс, математики, осенний семестр 1997/98 уч.года)

1. Пусть X — метрическое пространство. Тогда $Y \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $X \setminus Y$ замкнуто.

2. Показать, что от конечности в свойствах пересечений открытых множеств нельзя отказаться.

3. Доказать, что $B_\varepsilon(x)$ открыто.

4. Доказать, что $\operatorname{Int} Y$ открыто.

5. Доказать, что $\overline{Y}$ замкнуто.

6. Проверить для замкнутых множеств свойства 1 З – 4 З.

7. Привести пример топологического пространства (X, τ), не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).

8. В топол. пр-ве $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.

9. В топол. пр-ве $\overline{Y}$ замкнуто.

10. Проверить для τ_1 (топологии, индуцированной на подпространстве) аксиомы топологии.

11. Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. Тогда топологию на $Y \subset X$ можно ввести двумя способами:

1) ρ_X порождает τ_X, которая индуцирует τ_1,

2) ρ_X при ограничении на Y дает ρ_Y, которая порождает τ_{ρ_Y}.

Доказать, что $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$.

12. Пусть $Y_1 \subset X$ и $Y_2 \subset X$ — открытые плотные подмножества. Тогда $Y = Y_1 \cap Y_2$ — открытое плотное подмножество.

13. Пусть $X = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые, $f : X \to Y$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{F_1} : F_1 \to Y$ и $f|_{F_2} : F_2 \to Y$ непрерывны.

14. Пусть $f_n : X \to \mathbf{R}$ — непрерывные функции, сходящиеся к f равномерно на X. Тогда f непрерывная.

15. Пусть X и Y — метрические пространства. Доказать, что $f : X \to Y$ непрерывна в точке x_0 в смысле отображений соответствующих топологических пространств тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ с $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

16. Привести пример биективного непрерывного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

17. Какие условия надо наложить на произвольную систему подмножеств $\mathcal{B}_1$, чтобы в результате взятия их произвольных объединений получить некоторую топологию ?

18. Проверить (с использованием предыдущей задачи), что $X \times Y$ действительно топологическое пространство.

19. Доказать, что $X \times Y$ и $Y \times X$ гомеоморфны.

20. Доказать, что $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$ гомеоморфны.

21. Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X\times Y$ следующие расстояния:

$$\rho_{\max}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\{\rho_X(x_1,x_2),\ \rho_Y(y_1,y_2)\},$$

$$\rho_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{\rho_X^2(x_1,x_2)+\rho_Y^2(y_1,y_2)},$$

$$\rho_+((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \rho_X(x_1,x_2)+\rho_Y(y_1,y_2).$$

Доказать:

1) Что это метрики.

2) Что соответствующие топологии на $X\times Y$ совпадают.

22. Доказать, что подмножества прямой (a,b), $[a,b)$ и $[a,b]$ не гомеоморфны.

23. Отрезок $[a,b]\subset\mathbf{R}$ связен и линейно связен.

24. Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

25. Привести пример связного, но не линейно связного пространства.

26. Привести пример нехаусдорфова топологического пространства.

27. Доказать, что декартово произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

28. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве каждая точка замкнута.

29. Всякое метрическое пространство нормально.

30. Пусть $f: X\to X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек $F_f := \{x\in X \mid f(x)=x\}$ замкнуто.

31. Доказать, что X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta := \{(x,y)\mid x=y\}\subset X\times X$ замкнута в $X\times X$.

32. : **(лемма Урысона)** Пусть X — нормальное топологическое пространство, F_0 и F_1 — замкнутые непересекающиеся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f: X\to[0,1]$, что $f|_{F_0}=0$, $f|_{F_1}=1$.

33. Замкнутое подмножество замкнутого подмножества замкнуто в объемлющем пространстве.

34. (Теорема Титце о продолжении) Пусть X — нормальное топологическое пространство, $f: F\to\mathbf{R}$ — непрерывная функция. Тогда f продолжается до непрерывной функции $g: X\to\mathbf{R}$. Если f ограничена, то и g можно выбрать ограниченной той же константой.

35. Доказать, что отрезок $[a,b]$ компактен.

36. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

37. Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

38. Доказать, что непрерывный образ компакта компактен.

39. Пусть $f: X\to\mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на компактном пространстве X. Тогда f ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значения.

40. Пусть X — метрическое пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

1) X компактно;

2) любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ имеет сходящуюся подпоследовательность;

3) любая последовательность вложенных непустых замкнутых множеств $\{F_n\}$ (т. е. $F_n \supset F_{n+1}$) имеет непустое пересечение.

41. Декартово произведение компактных пространств является компактным.

42. Привести пример многообразия с несогласованными гладкими структурами, т. е. с двумя такими гладкими атласами (U_i, φ_i) и (V_j, ψ_j), что $\{(U_i, \varphi_i), (V_j, \psi_j)\}$ не является гладким атласом.

43. Доказать, что S^n и $\mathbf{R}P^n$ являются гладкими многообразиями.

44. Будут ли гладкими многообразиями граница квадрата и восьмерка (подмножества $\mathbf{R}^2$) ?

45. Доказать, что S^2 — комплексно-аналитическое многообразие.

46. Доказать, что из гладкости функции по отношению к некоторой карте следует гладкость по отношению к любой.

47. Доказать, что из гладкости отображения по отношению к некоторой паре карт следует гладкость по отношению к любой.

48. Проверить, что формулы

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - \ldots - (x^n)^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$x^k = \frac{y^k}{\sqrt{\varepsilon^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^n)^2}}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

задают диффеоморфизм $B_\varepsilon(0) \subset \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^n$.

49. Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

50. (оправдание определения) Пусть $\gamma : (-1; 1) \to M$ — гладкое отображение. Тогда соответствие

$$\xi_\gamma : (x^1, \ldots, x^n) \rightsquigarrow \left. \left(\frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt} \right) \right|_{t=0}$$

является вектором. Здесь в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ отображение γ задано как $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$.

51. Каждый касательный вектор в точке P однозначно определяется своими компонентами относительно одной системы координат.

52. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальная система координат в окрестности $P \in M$, $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, а $\xi \in T_P M$ имеет координаты ξ^i. Тогда соответствие

$$f \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^n) \xi^i$$

не зависит от выбора локальной системы координат и определяет оператор дифференцирования.

53. Доказать эквивалентность трех определений дифференциала.

54. Привести пример погружения, взаимно-однозначного на образ, но не являющегося вложением.

55. Для компактных многообразий вложение всегда является сильным.

56. Привести пример такого вложения, что образ не является подмногообразием (и даже многообразием).

57. Непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.

58. Проверить, что ограничения карт на край действительно образуют атлас.

59. Условие, что матрица $\|g_{ij}\|$ симметрическая (невырожденная) положительно определенная достаточно проверить для каждой точки $P \in M$ только в одной карте.

60. Доказать, что многообразия S^1 , S^2 , S^n , T^2 ориентируемы.

61. Доказать, что комплексно-аналитическое многообразие ориетируемо.

62. Доказать, что проективная плоскость $\mathbf{R}P^2$ есть неориентируемое многообразие.

63. Проверить инвариантность определения скалярного произведения с помощью римановой метрики.

64. Проверить согласованность двух определений обратного образа.

65. Доказать, что если $i : N \to M$ — погружение (в частности, вложение), а g — риманова метрика на M, то i^*g — риманова метрика на N. Почему это не так для произвольного отображения ?

66. Доказать теорему о существовании римановой метрики с помощью разбиения единицы (без теоремы Уитни).

67. Показать, что тензор типа $(1,1)$, инвариантный относительно ортогональных замен координат, пропорционален тензору δ^i_j.

68. Показать, что тензор третьей валентности, инвариантный относительно произвольных замен координат, равен нулю.

69. Найти общий вид тензора четвертой валентности, инвариантного относительно произвольной замены координат.

70. Выразить след матрицы в виде результата тензорных операций.

71. Выразить детерминант матрицы в виде результата тензорных операций.

72. Доказать с помощью тензорных формул правило вычисления детерминанта произведения матриц:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

73. Выразить коэффициенты многочлена $\det(A - \lambda E)$ в виде результата тензорных операций .

74. Доказать, что величины C^i_i, $C^i_j C^j_i$, $C^i_j C^j_k C^k_i$, выражаются через коэффициенты многочлена $\det(C - \lambda E)$.

75. Найти валентность тензора, компоненты которого суть коэффициенты

1) векторного произведения,

2) смешанного произведения

векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

76. Пусть X имеет валентность $(1,0)$, W – $(0,1)$. Найти ранг оператора $X \otimes W$.
77. В точке ковекторы являются функционалами на векторах.
78. Базисы $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ в $T_P M$ и $\{dx^j\}$ в $T_P^* M$ двойствены.
79. Пусть L_T — "полилинейное отображение", соответствующее тензору T, а T_L — "тензор", соответствующий полилинейному отображению L. Доказать, что

1) L_T полилинеен и не зависит от выбора системы координат.

2) T_L действительно удовлетворяет (p,q)-тензорному закону.

3) Эти отображения взаимно обратны.

80. Проверить тензорный закон для суммы тензоров.
81. Показать на примере, что перестановка верхнего и нижнего индекса не является тензорной операцией. Рассмотреть случай тензора типа $(1,1)$ (линейного оператора). Получить в частности, что понятие симметричности оператора $C^i_j = C^j_i$ зависит от системы координат.
82. Пусть b_{ij} — невырожденное тензорное поле типа $(0,2)$. Под невырожденностью понимается условие $\det \|b_{ij}\| \neq 0$. Проверить независимость этого условия от выбора системы координат.
83. Доказать, что компоненты обратной матрицы b^{jk}, т. е. удовлетворяющей условию $b^{jk} b_{ki} = \delta^j_i$, образуют тензор типа $(2,0)$.
84. Докажите, что альтернирование является линейным отображением, осуществляющим проектирование на кососимметрические тензоры, а симметрические лежат в его ядре.
85. Покажите, что для получения формулы внешнего умножения на языке дифференциальных форм достаточно перемножить выражения, а затем, путем перестановок (с учетом знаков) упорядочить дифференциалы.
86. Выражение $\sqrt{\det \|g_{ij}\|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ является тензором относительно замен координат с положительным якобианом. Здесь g_{ij} — риманова метрика.
87. Покажите, что обычное частное дифференцирование компонент тензорного поля в $\mathbf{R}^n$ не является тензорной операцией.
88. Явный вид ∇ в $\mathbf{R}^n$ для общих тензоров устанавливается аналогично выкладкам для векторных и ковекторных полей. Проделайте эту выкладку.
89. Проверить правило Ньютона-Лейбница ковариантного дифференцирования произведения произвольных тензорных полей.
90. Аффинная симметричная связность ∇ на римановом многообразии коммутирует с операциями поднятия и опускания индексов.
91. Доказать эквивалентность требований евклидовости с точки зрения метрики и евклидовости с точки зрения связности.
92. Если две геодезические соприкасаются в некоторой точке, то они совпадают.
93. При параллельном перенесении вектора вдоль геодезической римановой связности угол между ним и касательным вектором остается постоянным.
94. Показать, что в координатах, заданных отображением exp, все Γ^i_{jk} обращаются в P_0 в нуль.
95. Доказать, что тензор Риччи симметричен.

96. Чему равен тензор кривизны одномерного многообразия ?

97. Доказать, что если Γ^i_{jk} коэффициенты связности, то $\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ является тензором.

98. Доказать, что если Γ^i_{jk}, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ – коэффициенты двух связностей, то $\Gamma^i_{jk} - \tilde{\Gamma}^i_{jk}$ является тензором.

99. Доказать, что $\nabla_k \delta^i_j = 0$.

100. Составить уравнение параллельного перенесения векторов на плоскости.

101. Составить уравнение геодезических линий на плоскости и в пространстве.

102. Составить уравнение геодезических линий на сфере. Найти решения уравнения.

103. Описать операцию параллельного перенесения по основанию прямого кругового конуса.

104. Описать операцию параллельного перенесения по треугольнику на сфере, образованному двумя меридианами и экватором.

105. Показать, что если два подмногообразия соприкасаются по некоторой кривой, то операция параллельного перенесения вдоль этой кривой не зависит от выбора подмногообразия.

106. Выписать в векторной форме формулу ковариантной производной на поверхности в трехмерном пространстве.

107. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от способа расположения кривой на конусе.

108. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль параллели.

109. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль кривой, составленной из двух меридианов и параллели.

110. Установить зависимость между углом поворота касательного вектора на сфере в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой и площадью области, ограниченной этой кривой.

111. Выписать оператор Лапласа $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$ в

1) полярных координатах в R^2 ,

2) сферических координатах в R^3 .

112. Вычислить тензор кривизны

1) сферы S^2,

2) тора T^2 , вложенного в R^3 ,

3) прямого кругового конуса,

4) цилиндра.

113. Найти число независимых компонент тензора кривизны многообразия размерности 2, 3, 4.
114. Описать геодезические линии на псевдосфере.
115. Доказать, что на поверхности в трехмерном пространстве линия является геодезической тогда и только тогда, когда она в каждой точке нормальна, т.е. ее нормаль параллельна к нормали к поверхности.
116. Показать, что при движении геодезические линии переходят в геодезические линии.
117. Покажите, что из непрерывной гомотопности двух гладких отображений следует их гладкая гомотопность.
118. Градиент дифференциальной формы в координатах можно получить "непосредственным дифференцированием". Проверить.
119. Проверить, что при взятии обратного образа получаем действительно дифференциальную форму.
120. Доказать, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{\deg_{\omega_1} \deg_{\omega_2}} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

121. Доказать, что если $\deg \omega > n$, то $\omega = 0$.
122. Доказать, что если формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0.$$

123. Показать, что при смене ориентации интеграл меняет знак.
124. Показать, что, при некоторых естественных ограничениях на карты, можно вычислять интеграл от формы следующим образом: разбить многообразие на куски, каждый из которых лежит в одной карте, проинтегрировать ограничения формы в локальных координатах, а результаты сложить.
125. Вывести из общей формулы Стокса формулы

1) Грина;

2) Стокса;

3) Остроградского — Гаусса.