

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль–август 2023 года

ВАРИАНТ 236

1. Найдите $f\left(\frac{1}{2}\right)$, если $f(x) = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt{5x-1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
2. Найдите четыре числа a, b, c, d , если известно, что они образуют возрастающую геометрическую прогрессию, что $a+d=28$ и что $b+c=12$.
3. Решите неравенство
$$\log_x \log_3 \left(2^x - 1\right) \geq 0.$$
4. Решите уравнение
$$2 \cos 2x + \frac{\cos x - \cos 3x}{\cos x + \cos 3x} = 2.$$
5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На его диагонали AC отмечена точка E , а на продолжении этой диагонали за точку C отмечена точка F таким образом, что $\angle ADE = \angle CBF$. Найдите угол $\angle CDF$, если известно, что $\angle ABE = 15^\circ$.
6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению
$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} = 1.$$
Найдите наименьшее возможное значение выражения $a+b+c$.

7. Дан куб с ребром 1, нижним основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . На ребрах A_1D_1, BB_1, CC_1, AD отмечены соответственно точки K, L, M, N , так что $A_1K = KD_1$, $BL : LB_1 = 7 : 1$, $CM : MC_1 = DN : NA = 4 : 3$. Найдите площадь сечения тетраэдра $KLMN$, параллельного ребрам KL и MN , имеющего форму ромба.